

PARTIE I

T. 72

7 Q1 calcul de probabilités.

$$a) \underline{p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V)}.$$

4 b) Considérons une épreuve à laquelle participent A, B et C.

Notons EA (resp. EB; resp. EC) l'événement A (resp. B; resp. C) rate son tiré.

On cherche ici la probabilité de l'événement: $EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C) = (EA \cap \bar{E}B) \cup (EA \cap \bar{E}C)$.

$$p(EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = p(EA \cap \bar{E}B) + p(EA \cap \bar{E}C) - p(EA \cap \bar{E}B \cap \bar{E}C)$$

$$p(EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = p(EA \cap \bar{E}B) + p(EA \cap \bar{E}C) - p(EA \cap \bar{E}B \cap \bar{E}C). \text{ Par indépendance il}$$

$$\text{vient: } p(EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = p(EA)p(\bar{E}B) + p(EA)p(\bar{E}C) - p(EA)p(\bar{E}B)p(\bar{E}C).$$

$$p(EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} (3 + 2 - 1) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

$$\underline{p(EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = \frac{2}{9}.$$

Remarque.. $EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)$ signifie ni et seulement si A est tué au cours de l'épreuve et B et C ne le sont pas.

$$2) c) p(\bar{E}B \cup \bar{E}C) = p(EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) + p(\bar{E}A \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C));$$

$$\text{Or } p(\bar{E}A \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = p(\bar{E}B \cup \bar{E}C) - p(EA \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C))$$

$$p(\bar{E}A \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = p(\bar{E}B) + p(\bar{E}C) - p(\bar{E}B \cap \bar{E}C) - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{9+6-3-4}{18}$$

$$\underline{p(\bar{E}A \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)) = \frac{4}{9}.$$

$$p(\bar{E}B \cap \bar{E}C) = p(\bar{E}B)p(\bar{E}C)$$

Remarque.. $\bar{E}A \cap (\bar{E}B \cup \bar{E}C)$ signifie ni et seulement si A et B, pas tué.

13 Q2 Détermination de probabilités conditionnelles.

1 a) Tout que A et B soit vivants personne ne tue sur C. Est donc impossible que A et B soient vivants et que C soit tué.
d'événement AB , et donc impossible.

3. b) Sachant que ABC_n est réalisé, ABC_{n+1} se réalise si et seulement si les trois tireurs ratent leur tir à la $n^{\text{ème}}$ épreuve ; l'indépendance des tir nous donne alors

$$\underline{\underline{P(ABC_{n+1} / ABC_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}}}$$

4. c) Sachant que ABC_n est réalisé, BC_{n+1} se réalise si et seulement si A est tué et B et C restent vivants ; sachant de plus A est tué et B ou C survivent leur tir.

$$\text{d'après } \textcircled{1} \text{ b) : } \underline{\underline{P(BC_{n+1} / ABC_n) = \frac{2}{9}}}$$

Sachant que ABC_n est réalisé, CA_{n+1} se réalise si et seulement si A et C restent vivants et B est tué ; sachant de plus A et C survivent et B est tué leur tir.

$$\text{L'indépendance des tir donne : } \underline{\underline{P(CA_{n+1} / ABC_n) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}}}$$

4. d) Accélération !

$$\underline{\underline{P(A_{n+1} / ABC_n) = 0}} \text{ ; si } A, B, C \text{ participent à la } n^{\text{ème}} \text{ épreuve, C ne peut pas être tué.}$$

$$\underline{\underline{P(B_{n+1} / ABC_n) = 0}} \text{ pour les mêmes raisons.}$$

$$\underline{\underline{P(C_{n+1} / ABC_n) = \frac{4}{9}}}$$
 ; à la $n^{\text{ème}}$ épreuve A élimine B et C survivent leur tir et on retrouve la situation de $\textcircled{1}$ c).

$$4. e) \underline{\underline{P(A_{n+1} / CA_n) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}}}$$
 ; à la $n^{\text{ème}}$ épreuve A élimine B et C le rate ...

$$\underline{\underline{P(B_{n+1} / BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}}$$
 ; à la $n^{\text{ème}}$ épreuve B élimine A et C le rate ...

$$\underline{\underline{P(C_{n+1} / CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}}}$$
 ; à la $n^{\text{ème}}$ épreuve C élimine B et A le rate

$$\underline{\underline{P(A_{n+1} / BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}}}$$
 ; à la $n^{\text{ème}}$ épreuve B rate son tir et C le rate.

3. f) $p(\phi_{n+1} / ABC_n) = 0$ car C ne peut pas être lui à une épreuve où participent A et B.

$p(\phi_{n+1} / BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; B et C éliminés l'un après l'autre à la $n^{i\text{ème}}$ épreuve.

$p(\phi_{n+1} / CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$; C et A éliminés l'un après l'autre à la $n^{i\text{ème}}$ épreuve.

Nous allons résumer ces résultats dans un tableau à double entrée. A l'intersection de la colonne portant l'événement U et de la ligne portant l'événement V nous écrivons $p(V/U)$

ABC_n	BC_n	CA_n	A_n	B_n	C_n	ϕ_n	
$\frac{1}{9}$	○	○	○	○	○	○	ABC_{n+1}
$\frac{2}{9}$	$(\frac{1}{3})$	○	○	○	○	○	BC_{n+1}
$\frac{2}{9}$	○	$(\frac{2}{9})$	○	○	○	○	CA_{n+1}
0	○	$\frac{4}{9}$	1	○	○	○	A_{n+1}
0	$\frac{1}{3}$	○	○	1	○	○	B_{n+1}
$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	○	○	1	○	C_{n+1}
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	○	○	○	1	ϕ_{n+1}

○ = 0 prouvant d'une intersection quasi-impossible!

1 est quasi-certain que le vainqueur ne se retire pas
 $\frac{1}{3}$ = 1 intersection quasi impossible.

Tien il y a 2 trous. Pour finir la page bouchez les!

• $p(BC_{n+1} / BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; B et C restés l'un après l'autre...

•• $p(CA_{n+1} / CA_n) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$; C et A restés l'un après l'autre...

28 (Q3) a) $\{T=1\}$ n'arrive ni et redouble ni à la fin de la première épreuve
 il ne rate pas qu'un tirage qui ne peut être que C.

$\{T=1\}$ n'arrive ni et redouble ni à la première épreuve A et B sont tués.

$\{T=1\}$ n'arrive ni et redouble ni A démit par terre et B ou C démit par terre.

D'après Q1 c) : $P(T=1) = \frac{4}{9}$

3 b) $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_n = ABC_0 \cap ABC_1 \cap \dots \cap ABC_n !$

Alors $P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_n) = P(ABC_0) P(ABC_1 | ABC_0) P(ABC_2 | ABC_0 \cap ABC_1) \dots P(ABC_n | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_{n-1})$.

Remarque $P(ABC_{k+1} | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k) = P(ABC_{k+1} | ABC_k) = \frac{1}{9}$ pour $k \in \mathbb{N}$

$P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_n) = P(ABC_0) \prod_{k=0}^{n-1} P(ABC_{k+1} | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k) = 1 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{9}\right)^n$.

Donc $P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ et même pour tout $n \in \mathbb{N}^{*0}$.

6 c) soit $k \in \{0, n-1\}$. Posons $H_n^k = ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$.

$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n = ABC_0 \cap ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$.

$P(H_n^k) = P(ABC_0) P(ABC_1 | ABC_0) \dots P(ABC_k | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_{k-1}) P(CA_{k+1} | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k) \dots$

$P(CA_{k+1} | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_k) \dots P(CA_n | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n)$.

$P(H_n^k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} P(ABC_{i+1} | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_i) \right] P(CA_{k+1} | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} P(CA_{j+1} | ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_j)$

Ceci a deux autres parts : $k=0$ et $k=n-1$ (pour $k=0$ le premier produit vaut 1 et pour $k=n-1$ c'est le second qui vaut 1 !)

Notre nouvelle écriture :

$P(H_n^k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} P(ABC_{i+1} | ABC_i) \right] P(CA_{k+1} | ABC_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} P(CA_{j+1} | CA_j)$

Ceci donne encore : $P(H_n^k) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{9} \right) \frac{1}{9} \prod_{j=k+1}^{n-1} \frac{1}{9}$ d'après Q2 et combinat !

$$P(H_n^k) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{2}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1-k}$$

$$\forall k \in [0, n-1], P(ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

$$\text{Ainsi } P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disjoints}}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right).$$

$$\text{Ainsi } P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n)\right) = 2 \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right).$$

6 d) Soit $k \in [0, n-1]$. Posons $\hat{H}_n^k = ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n$. En raisonnant comme dans c) on obtient :

$$P(\hat{H}_n^k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} P(ABC_{i+1} / ABC_0 \cap \dots \cap ABC_i) \right] P(BC_{k+1} / ABC_0 \cap \dots \cap ABC_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} P(BC_{j+1} / ABC_0 \cap \dots \cap ABC_j \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_j)$$

$$\text{Ainsi il vient : } P(\hat{H}_n^k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} P(ABC_{i+1} / ABC_i) \right] P(BC_{k+1} / ABC_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} P(BC_{j+1} / BC_j).$$

$$P(\hat{H}_n^k) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k} = \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\forall k \in [0, n-1], P(ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disjoints}}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n)\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

6 e) Soit $n \in [2, +\infty[$.

$$\text{Notons que } \{T > n\} = \left(\bigcup_{k=1}^n ABC_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n) \right) \cup$$

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n) \right)$$

Notons que les événements L , L' et L'' sont deux à deux disjoints.

Alors $P(T > n) = P(L) + P(L^2) + P(L^n)$; c'est la même chose :

$$P(T > n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n - 2\left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n. \quad \underline{\underline{P(T > n) = -2\left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

Pour $n=0$: $-2\left(\frac{1}{9}\right)^0 + 2\left(\frac{2}{9}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = -2 + 2 + 1 = 1 = P(T > 0)$.

Pour $n=1$: $-2\left(\frac{1}{9}\right)^1 + 2\left(\frac{2}{9}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

$$\begin{aligned} P(ABC_1) &= P(ABC_1/ABC_0)P(ABC_0) \\ P(CA_1) &= P(CA_1/ABC_0)P(ABC_0) \\ \downarrow P(BC_1) &= P(BC_1/ABC_0)P(ABC_0) \end{aligned}$$

↳ $P(T > 1) = P(ABC_1 \cup CA_1 \cup BC_1) = P(ABC_1) + P(CA_1) + P(BC_1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\underline{P(T > n) = -2\left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}$.

Ceci entraîne donc à évaluer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{\underline{P(T=n) = P(T > n-1) - P(T > n) = -2\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-2\left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T=n) = \left(-2 + \frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \left(2 - \frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T=n) = -\frac{16}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{16}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Noter que si $n=1$: $-\frac{16}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^0 + \frac{14}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^0 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^0 = -\frac{16}{9} + \frac{14}{9} + \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$; on

retrouve ainsi le résultat de Q3 a).

$$6 \quad \underline{\underline{\int \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) = -\frac{16}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}}}$$

la série géométrique ($|\frac{1}{9}| < 1$, $|\frac{2}{9}| < 1$ et $|\frac{1}{3}| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) = -\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{14}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{9}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -2 + 2 + 1 = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=n) = 1 \text{ et c'est heureux !}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n p(T=n) \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, n p(T=n) = -\frac{16}{9} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9} n \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

les séries de termes généraux $n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$, $n \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$ et $n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ convergent car $|\frac{1}{9}| < 1$, $|\frac{2}{9}| < 1$ et $|\frac{1}{3}| < 1$; donc la série de terme général $n p(T=n)$ est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes; elle est même absolument convergente car à termes positifs.

Ainsi T possède une espérance.

$$E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n p(T=n) = -\frac{16}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$E(T) = -\frac{16}{9} \frac{1}{(1-\frac{1}{9})^2} + \frac{14}{9} \frac{1}{(1-\frac{2}{9})^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = -\frac{18}{8} + \frac{18}{7} + \frac{3}{2} = \frac{102}{56}$$

$$E(T) = \frac{51}{28} \quad E(T) \approx 1,8 \quad \text{ça demande rapide, hein !}$$

18 (Q4) a) Nécessaire et suffisant à la même épreuve, donc l'événement A est répétitive.

L'événement A se produit à l'issue de la n-ième épreuve et n'est possible pour n=1.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$P(ABC_3, n-1 \cap ABC_2 \cap CA_{k+1}, n-1 \cap CA_{k+1}, n-1 \cap A_{k+1}) = P(ABC_3 \cap \dots \cap ABC_2 \cap CA_{k+1}, n-1 \cap \dots \cap CA_{k+1}, n-1 \cap A_{k+1}) \times$$

$$P(A_{k+1} / ABC_3, n-1 \cap \dots \cap ABC_2 \cap CA_{k+1}, n-1 \cap \dots \cap CA_{k+1}, n-1)$$

$$\stackrel{H3.4}{=} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times P(A_{k+1} / CA_{k+1}) \quad \text{OK !}$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{4}{9}\right) \text{ d'après } \mathcal{P}2 \text{ c}$$

$$\text{Alors } P(ABC_3, n-1 \cap ABC_2 \cap CA_{k+1}, n-1 \cap CA_{k+1}, n-1 \cap A_{k+1}) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

3. b) doit $n \in \mathbb{N}, +\infty \mathbb{U}$. Notons GA_n l'événement A gagne après la $n^{\text{ème}}$ épreuve.

Notons que pour l'empate A doit d'abord tuer B puis C.

$$\text{Ainsi } GA_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_k \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n).$$

Cette réunion est disjointe : $P(GA_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(ABC_k \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n)$.

$$P(GA_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^n = 2 \left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - (1/2)} = 4 \left[\left(\frac{2}{9}\right)^n - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right] = \frac{8}{9} \left[\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right]$$

$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty \mathbb{U}$, $P(GA_n) = \frac{8}{9} \left[\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right]$; ceci vaut encore pour $n=1$.

3. c) Notons G_A l'événement A gagne. $G_A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} GA_n$.

$$P(G_A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} GA_n\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{union disjointe}}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} P(GA_n) = \frac{8}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{les 2 séries convergent}}}{=} \frac{8}{9} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right]$$

$$P(G_A) = \frac{8}{9} \left(\frac{1}{1 - 2/9} - \frac{1}{1 - 1/9} \right) = \frac{8}{9} \left(\frac{9}{7} - \frac{9}{8} \right) = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}.$$

A gagne avec la probabilité $\frac{1}{7}$.

3. d) le problème est analogue au précédent... nous irons plus vite.

$$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty \mathbb{U}, GB_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} (ABC_k \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap B_n).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty \mathbb{U}, P(GB_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(ABC_k \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1}) \times P(B_n | ABC_k \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty \mathbb{U}, P(GB_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k P(B_n | B_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{1}{3}$$

③ d)

② c)

$$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty \mathbb{U}, P(GB_n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - (1/3)^{n-1}}{1 - 1/3} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right].$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{to } \mathbb{I}, p(GB_n) = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right).$$

$$\text{pour } \forall n \in \mathbb{N}^*, p(GB_n) = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right) \text{ car } p(B_1) = 0.$$

soit G_B l'événement B gagne.

$$p(G_B) = p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} GB_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(GB_n) = \frac{1}{3} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{9}} \right)$$

$$p(G_B) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{8} \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

B gagne avec la probabilité $\frac{1}{8}$.

6 c) Ici c'est plus compliqué.

Il y a trois possibilités

→ A et B se tuent à la même époque

→ A tue B puis C tue A

→ B tue A puis C tue B

Notons que $p(C_2) = \frac{4}{9}$ d'après Q 2 c) (A tue B et B tue A)

Supposons $n \geq 2$.

$$G_{C_n} = (ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap C_n) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n-2} (ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap C_n) \right. \\ \left. \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n-2} (ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap C_n) \right) \right)$$

$$p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap C_n) = p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1}) p(C_n | ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1}).$$

$$= \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} p(C_n | ABC_{n-1}) = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right).$$

$$p(ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap C_n) = p(ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1}) p(C_n | CA_{n-1})$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}
 P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap C_n) &= P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_{n-1}) \cdot P(C_n | BC_{n-1}) \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^\ell \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^\ell.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } P(GC_n) &= P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap C_n) + \sum_{\ell=0}^{n-2} P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap C_{\ell+1} \cap \dots \cap C_{n-1} \cap C_n) \\
 &\quad + \sum_{\ell=0}^{n-1} P(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap C_n).
 \end{aligned}$$

$$P(GC_n) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{1}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{\ell-1} \left(\frac{1}{2}\right)^\ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^\ell.$$

$$P(GC_n) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1 - (1/3)^{n-1}}{1 - 1/3}.$$

$$P(GC_n) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9} \left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right) + \frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right).$$

$$P(GC_n) = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Comme $P(GC_1) = \frac{1}{9}$ ceci vaut aussi pour $n=1$, $n=2$!

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(GC_n) = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Soit G_C l'événement "C gagne". $G_C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} GC_n$

$$P(G_C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(GC_n) = \frac{1}{18} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$P(G_C) = \frac{1}{18} \wedge \frac{1}{1-1/9} + \frac{2}{9} \frac{1}{1-2/9} + \frac{1}{6} \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{16} + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{67}{112}.$$

La probabilité pour que C gagne est $\frac{67}{112}$.

10

Q1 Expression de la matrice de transition.

g) a) Tout est fait dans Q & f) non !!

soit $n \in \mathbb{N}$. $ABC_{n+1} \subset ABC_n$.

$$\underline{\underline{P(ABC_{n+1}) = P(ABC_{n+1} | ABC_n) P(ABC_n) = \frac{1}{9} P(ABC_n)}}.$$

$BC_{n+1} \subset ABC_n \cup BC_n$.

$$\text{Rac } P(BC_{n+1}) = P(BC_{n+1} \cap ABC_n) + P(BC_{n+1} \cap BC_n).$$

$$= P(BC_{n+1} | ABC_n) P(ABC_n) + P(BC_{n+1} | BC_n) P(BC_n)$$

$$\underline{\underline{P(BC_{n+1}) = \frac{2}{9} P(ABC_n) + \frac{1}{3} P(BC_n)}}.$$

$$\text{Par des considérations analogues: } \underline{\underline{P(CA_{n+1}) = \frac{2}{9} P(ABC_n) + \frac{2}{9} P(CA_n)}}.$$

$$A_{n+1} \subset CA_n \cup A_n. \quad P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap CA_n) + P(A_{n+1} \cap A_n)$$

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | CA_n) P(CA_n) + P(A_{n+1} | A_n) P(A_n)$$

$$\underline{\underline{P(A_{n+1}) = \frac{1}{3} P(CA_n) + P(A_n)}}.$$

$$\text{Par des considérations analogues: } \underline{\underline{P(B_{n+1}) = \frac{1}{3} P(BC_n) + P(B_n)}}.$$

$C_{n+1} \subset ABC_n \cup BC_n \cup CA_n \cup C_n$.

$$P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} \cap ABC_n) + P(C_{n+1} \cap BC_n) + P(C_{n+1} \cap CA_n) + P(C_{n+1} \cap C_n)$$

$$P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} | ABC_n) P(ABC_n) + P(C_{n+1} | BC_n) P(BC_n) + P(C_{n+1} | CA_n) P(CA_n) + P(C_{n+1} | C_n) P(C_n).$$

$$\underline{\underline{P(C_{n+1}) = \frac{2}{9} P(ABC_n) + \frac{1}{6} P(BC_n) + \frac{1}{9} P(CA_n) + P(C_n)}}.$$

Pour des considérations analogues $\rho(\Phi_{n+1}) = \frac{1}{6} \rho(C_n) + \frac{4}{9} \rho(CA_n) + \rho(\Phi_n)$.

$$\text{En posant } \pi = \begin{bmatrix} 119 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 219 & 113 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 419 & 0 & 419 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 419 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 113 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 419 & 116 & 119 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 116 & 119 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

inductif : $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} = \pi E_n$

Notons que la somme des éléments de chaque colonne vaut 1

1 b) $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} = \pi E_n$. Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}, E_n = \pi^n E_0$.

Notons que $E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout n dans \mathbb{N} , E_n est la première colonne de π^n .

8 (Q2) Calcul des puissances de la matrice π .

$$4 \text{ a) } \pi' \pi'' = \begin{bmatrix} U' & 0 \\ V' & I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'' & 0 \\ V'' & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'U'' + 0V'' & U'0 + 0I_4 \\ V'U'' + I_4V'' & V'0 + I_4I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'U'' & 0 \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

$$\pi^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V^n & I_4 \end{bmatrix}$$

$$1 \text{ b) d'après 1 a) : } \pi = \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{bmatrix} \text{ avec } U = \begin{bmatrix} 119 & 0 & 0 \\ 219 & 113 & 0 \\ 419 & 0 & 419 \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 419 \\ 0 & 113 & 0 \\ 419 & 116 & 119 \\ 0 & 116 & 119 \end{bmatrix}$$

$$3 \text{ c) } \pi^n \text{ matrice d'itération par récurrence ; notons que : } \forall n \in \mathbb{N}^{\neq 0}, \pi^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V \sum_{k=0}^{n-1} U^k & I_4 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \pi^1 = \pi = \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^1 & 0 \\ V \sum_{k=0}^0 U^k & I_4 \end{bmatrix}$, la propriété est vraie pour $n=1$

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$\pi^{n+1} = \pi^n \pi = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V \sum_{k=0}^{n-1} U^k & I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^n U & 0 \\ (V \sum_{k=0}^{n-1} U^k) U + V & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{n+1} & 0 \\ V \sum_{k=0}^{n-1} U^{k+1} + V & I_4 \end{bmatrix}$$

Or $V \sum_{k=0}^{n-1} U^{k+1} + V = V (\sum_{k=1}^n U^k + I_4) = V \sum_{k=0}^n U^k = V \sum_{k=0}^{n+1-1} U^k$... ce qui achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V \sum_{k=0}^{n-1} U^k & I_4 \end{bmatrix}.$$

11
6 **Q3** a) U est triangulaire supérieure ; on a l'ensemble des valeurs propres de U et l'ensemble des éléments de sa diagonale ; $S_p(U) = \{ \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9} \}$.

$U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = \frac{1}{9}$, $\lambda_2 = \frac{2}{9}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$.

Alors U est diagonalisable

et les sous-espaces propres de U sont des droites vectorielles.

Noter que $U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 49 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour cela $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}x = \frac{1}{9}x \\ \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{9}y \\ \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}z = \frac{1}{9}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$$

$\text{SEP}(U, \frac{1}{9}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$. Pour cela $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre de U associé à la valeur propre $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ dont la 1^{ère} composante vaut 1

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre de π associé à la valeur propre $\lambda_2 = \frac{4}{9}$ dont le 3^{ème} composant vaut 1

$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ————— $\lambda_3 = \frac{1}{9}$ dont le 2^{ème} —————

5 b) v_1, v_2, v_3 sont trois vecteurs propres de U associés à des valeurs propres distinctes.

Ainsi (v_1, v_2, v_3) est une famille ^{LIBRE} de trois éléments de $\pi_{3,3}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. (v_1, v_2, v_3) est une base de $\pi_{3,3}(\mathbb{R})$.

La matrice de passage P de la base canonique $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ à la base (v_1, v_2, v_3)

est donc inversible. P^{-1} est la matrice de passage de (v_1, v_2, v_3) à $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

Rappelons que : $v_1 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$, $v_2 = \hat{e}_3$ et $v_3 = \hat{e}_2$.

Alors $\hat{e}_2 = v_3$, $\hat{e}_3 = v_2$ et $\hat{e}_1 = v_1 + v_3 + 2v_2 = v_1 + 2v_2 + v_3$.

$$\text{Alors } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alors } D = P^{-1}UP = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{19}{=} \textcircled{Q4} \quad \textcircled{a)} \quad D^n = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (1/9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (4/9)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/9)^n \end{bmatrix} \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{I}_3 + 0 + \dots + 0^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} D^k = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} (1/9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (4/9)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1/9)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (1/9)^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (4/9)^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (1/9)^k \end{bmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{I}_3 + 0 + \dots + 0^{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - (1/9)^n}{1 - 1/9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - (4/9)^n}{1 - 4/9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - (1/9)^n}{1 - 1/9} \end{bmatrix}$$

b) $|\frac{1}{9}| < 1$, $|\frac{1}{9}| < 1$, $|\frac{1}{3}| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = 0$ et

$\lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}) = \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

$$D = P^{-1} U P, \quad U = P O P^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U^n = P O^n P^{-1}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} D^n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} U^n = P O P^{-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U^n = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} U^k = \sum_{k=0}^{n-1} P O^k P^{-1} = P \sum_{k=0}^{n-1} O^k P^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} O^k = \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} (I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1}) = P \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\text{Un calcul simple donne: } P \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 3/8 & 3/2 & 0 \\ 9/28 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1}) = \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 3/8 & 3/2 & 0 \\ 9/28 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}.$$

$$V \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 3/8 & 3/2 & 0 \\ 9/28 & 0 & 9/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4/9 \\ 0 & 3/3 & 0 \\ 4/9 & 1/6 & 1/9 \\ 0 & 1/6 & 2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0 \\ 3/8 & 3/2 & 0 \\ 9/28 & 0 & 9/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 & 0 & 4/7 \\ 3/8 & 1/2 & 0 \\ 67/112 & 1/4 & 1/7 \\ 15/112 & 1/4 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V + VU + VU^2 + \dots + VU^{n-1}) = \begin{bmatrix} 3/7 & 0 & 4/7 \\ 3/8 & 1/2 & 0 \\ 67/112 & 1/4 & 1/7 \\ 15/112 & 1/4 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Pi^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V \sum_{k=0}^{n-1} U^k & I_4 \end{bmatrix}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H & I_4 \end{bmatrix} \text{ avec } H = \begin{bmatrix} 3/7 & 0 & 4/7 \\ 3/8 & 1/2 & 0 \\ 67/112 & 1/4 & 1/7 \\ 15/112 & 1/4 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, E_n = \Pi^n E_0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi^n \right) E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 67/112 \\ 15/112 \end{bmatrix}.$$

$$2. d) \forall n \in \mathbb{N}, E_n = \begin{bmatrix} P(ABC_n) \\ P(BC_n) \\ P(CA_n) \\ P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(\Phi_n) \end{bmatrix}$$

$$; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(ABC_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(BC_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(CA_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \frac{1}{8}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \frac{67}{112} \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\Phi_n) = \frac{15}{112}.$$

$(A_n)_{n \geq 0}, (B_n)_{n \geq 0}, (C_n)_{n \geq 0}$ sont des suites croissantes d'événements.

Le théorème de la limite monotone donne alors :

$$\underline{\underline{P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \frac{1}{4}}}, \quad \underline{\underline{P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \frac{1}{8}}}, \quad \text{et} \quad \underline{\underline{P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \frac{67}{112}}}$$

Ce pathica les résultats cités au-dessus de $\S 4$.

Gégé m'a "tu" en " !

J'ai mis 1h15 pour faire le problème au brouillon

J'ai mis 5h30 pour le rédiger au propre !!