

PARTIE I

Q1) Covariance des variables aléatoires X et Y . IC^a $V(X) > 0$

a) $\text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = E((\lambda X + Y - E(\lambda X + Y))(\lambda X + Y - E(\lambda X + Y))) = E((\lambda X + Y - E(\lambda X + Y))^2) = V(\lambda X + Y).$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = V(\lambda X + Y).$

$$V(\lambda X + Y) = \text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = \lambda^2 \overbrace{\text{cov}(X, X)}^{V(X)} + 2\lambda \overbrace{\text{cov}(X, Y)}^{V(X)} + \overbrace{\text{cov}(Y, Y)}^{V(Y)}.$$

bilinéarité de la covariance
+ propriété de la covariance

Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y).$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) = V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y).$

φ est un polynôme de degré au plus 2 et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) = V(\lambda X + Y) \geq 0.$

comme $V(X) > 0$: φ est un polynôme de degré 2 qui garde un signe constant sur \mathbb{R} .
Ainsi φ a au plus une racine. Sa discriminant est alors négatif ou nul.

Alors $(2 \text{cov}(X, Y))^2 - 4 V(X) V(Y) \leq 0. \quad 4(\text{cov}(X, Y))^2 \leq 4 V(X) V(Y).$

On a $(\text{cov}(X, Y))^2 \leq V(X) V(Y).$

Supposons que: $(\text{cov}(X, Y))^2 = V(X) V(Y)$. Alors φ admet un zéro et un seul
 λ_0 car son discriminant est nul.

$V(\lambda_0 X + Y) = 0$; $\lambda_0 X + Y$ est "constante avec une probabilité 1".

$\exists b \in \mathbb{R}, P(\lambda_0 X + Y = b) = 1. \quad P(Y = -\lambda_0 X + b) = 1. \quad \text{Poser } a = -\lambda_0.$

Alors $P(Y = aX + b) = 1.$

Si $\text{cov}(X, Y) = 0$: $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(Y = aX + b) = 1.$

Réciproquement, supposons que: $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(Y = aX + b) = 1.$

Alors $P(Y - aX = b) = 1$. $Y - aX$ est "constante avec une probabilité 1".

Ainsi $V(Y - aX) = 0$; $\varphi(-a) = 0$. φ admet une racine... et une seule (φ admet au plus une racine)
puisque φ est un polynôme de degré 2 ayant une racine et une seule.

le discriminant de \mathcal{Q} est alors nul. Ainsi $(2\text{cov}(X,Y))^2 - 4V(X)V(Y) = 0$
 Par conséquent $\text{cov}(X,Y) = V(X)V(Y)$.

Finalement $\text{cov}(X,Y) = V(X)V(Y)$ n'est réalisable si il existe des a et b tels que
 $P(Y = aX + b) = 1$, autrement dit si et seulement si Y est une fonction quasi-affine de X .

Remarque 1.. On peut en conclure que :

$\text{cov}(X,Y) = V(X)V(Y)$ n'est réalisable si il existe des a et b tels que
 Y soit presque sûrement égale à $aX + b$.

2.. Sous l'hypothèse $V(X) > 0$ on a :

$$\rightarrow (\text{cov}(X,Y))^2 \leq V(X)V(Y)$$

$$\rightarrow (\text{cov}(X,Y))^2 = V(X)V(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P(Y = aX + b) = 1 \\ \text{ou} \\ \exists (a',b') \in \mathbb{R}^2, P(X = a'X + b') = 1 \end{cases}$$

$$\text{ou } (\text{cov}(X,Y))^2 = V(X)V(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} V(X) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P(Y = aX + b) = 1 \end{cases}$$

Q2 Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y .

Il a $V(X) > 0$ et $V(Y) > 0$.

a) $\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ par définition.

$(\text{cov}(X,Y))^2 \leq V(X)V(Y)$ donc $|\text{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} = \sigma(X)\sigma(Y)$

Ainsi $\frac{|\text{cov}(X,Y)|}{\sigma(X)\sigma(Y)} \leq 1$; $\left| \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right| \leq 1$; $|\rho| \leq 1$; $\rho \in [-1, 1]$.

$\rho = -1$ ou $\rho = 1 \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \pm 1 \Leftrightarrow (\text{cov}(X,Y))^2 = (\sigma(X))^2(\sigma(Y))^2$

Ainsi : $\rho \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow (\text{cov}(X,Y))^2 = V(X)V(Y)$.

ou $\rho \in \{-1, 1\}$ n'est réalisable si il existe des a et b tels que Y soit presque sûrement égale à $aX + b$.

b) si X et Y sont indépendants : $\text{cov}(X, Y) = 0$ d'où $\rho = 0$.

c) $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. Notons que X possède un moment d'ordre 2 d'où $E(Y)$ existe.
 $E(Y) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 0 = 1$.

Plutôt que que $Y = X^4$ possède une variance. Il suffit de prouver que $E(X^4)$ existe.

Pour cela il suffit de prouver que X possède un moment d'ordre 4.

Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\Gamma(\pi)} e^{-t^2}$.

$t \mapsto t^4 f(t)$ est continue sur \mathbb{R} . Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_0^A t^4 f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\pi)} \int_0^A (t^3)' (-t e^{-t^2}) dt = \frac{1}{\Gamma(\pi)} [-t^3 e^{-t^2}]_0^A - \int_0^A (-3t^2) \frac{1}{\Gamma(\pi)} e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^A t^4 f(t) dt = -A^3 e^{-A^2} + 3 \int_0^A t^2 f(t) dt.$$

X possède un moment d'ordre 2 qui vaut 1 d'où $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$ existe.

$$t \mapsto t^4 f(t) \text{ étant paire} = \int_0^{+\infty} t^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f(t) dt = \frac{1}{2} E(X^4) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A t^4 f(t) dt \right) = 0 + 3 \times \frac{1}{2} = 3/2.$$

$\int_0^{+\infty} t^4 f(t) dt$ existe et vaut $3/2$. $t \mapsto t^4 f(t)$ étant pair : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f(t) dt$ existe et vaut

$$2 \times \frac{3}{2} = 3.$$

Ainsi X possède un moment d'ordre 4 qui vaut 3. $E(Y^4)$ existe et vaut 3.

Alors $V(Y)$ existe et $V(Y) = E(Y^4) - (E(Y))^4 = 3 - 1 = 2$.

$$\underline{E(X) = 0, V(X) = 1, E(Y) = 1 \text{ et } V(Y) = 2.}$$

X et Y possèdent un moment d'ordre 2 d'où $\text{cov}(X, Y)$ existe.

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) = E(X^3).$$

$E(X^3)$ existe d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 f(t) dt$ converge. Comme $t \mapsto t^3 f(t)$ est impair :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 f(t) dt \text{ existe et vaut } 0; \underline{E(X^3) = 0. \text{ cov}(X, Y) = 0. \text{ Ainsi } \underline{\underline{\rho = 0}}.}$$

$\{x^2 \leq 1\} \cap \{x < -1\} = \emptyset$ donc $P(\{x^2 \leq 1\} \cap \{x < -1\}) = 0$; $P(\{y \leq 1\} \cap \{x < -1\}) = 0$
 Notons ϕ la fonction de répartition de x . ϕ définit une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.

$P(y \leq 1) = P(x^2 \leq 1) = P(-1 \leq x \leq 1) = \phi(1) - \phi(-1) = \phi(1) - (1 - \phi(1)) = 2\phi(1) - 1$.

Or $2\phi(1) - 1 \neq 0$ car $2\phi(1) - 1 = 0 \Rightarrow \phi(1) = \frac{1}{2} = \phi(0)$! Ainsi $P(y \leq 1) \neq 0$.

$P(x < -1) = P(x \leq -1) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) \neq 0$

Alors $P(\{y \leq 1\} \cap \{x < -1\}) = 0$ et $P(y \leq 1)P(x < -1) \neq 0$.

$\rho = 0$ mais x et y ne sont pas indépendantes.

La réciproque de 2°b est fautive. Quel scoop !

PARTIE II

ⓐ) Calculs préliminaires.

a) Fixons q dans \mathbb{N} et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{I}q, +\infty[$, $\sum_{k=q}^n \binom{q}{k} = \binom{q+1}{n+1}$.

• $\sum_{k=q}^q \binom{q}{k} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1}$; l'égalité vaut pour $n=q$.

• Supposons l'égalité vraie $n \in \mathbb{I}q, +\infty[$ et montrons la pour $n+1$.

$\sum_{k=q}^{n+1} \binom{q}{k} = \sum_{k=q}^n \binom{q}{k} + \binom{q}{n+1} = \binom{q+1}{n+1} + \binom{q}{n+1} = \binom{q+2}{n+2} = \binom{q+2}{(n+1)+1}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{I}q, +\infty[$, $\sum_{k=q}^n \binom{q}{k} = \binom{q+1}{n+1}$.

Remarque.. On peut retrouver directement le résultat avec $\binom{q}{k} = \binom{q+1}{k+1} - \binom{q+1}{k}$ pour $k \geq q+1$...

b) $\forall n \in \mathbb{N}^0$, $\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{1}{k} = \binom{1+1}{n+1} = \binom{2}{n+1} = \frac{(n+1)!}{2}$... d'après a) avec $q=1$.

a) donne avec $q=2$: $\forall n \in \mathbb{I}2, +\infty[$, $\binom{3}{n+1} = \sum_{k=2}^n \binom{2}{k} = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{I}2, +\infty[$, $\sum_{k=2}^n k(k-1) = 2 \binom{3}{n+1} = 2n \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3!} = \frac{1}{3} (n+1)(n)(n-1)$.

a) donc avec $q=3$: $\forall n \in \mathbb{I}, +0\mathbb{I}$, $C_{n+1}^4 = \sum_{k=3}^n C_k^3 = \sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}$.

$\forall n \in \mathbb{I}, +0\mathbb{I}$, $\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) = 3! C_{n+1}^4 = 3! \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} = \frac{1}{4} (n+1)n(n-1)(n-2)$.

Résumés : $\forall n \in \mathbb{N}^0$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{I}, +0\mathbb{I}$, $\sum_{k=2}^n k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$ et

$\forall n \in \mathbb{I}, +0\mathbb{I}$, $\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$.

Remarque : Plus généralement : $\forall q \in \mathbb{N}^0$, $\forall n \in \mathbb{I}$, $\sum_{k=q}^n k(k-1)\dots(k-q+1) = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-q+1)}{q+1}$

A) Q2 Lois des variables aléatoires X et Y .

a)
 $\forall i, j \in \mathbb{I}, +0\mathbb{I}$, le nombre de parties \bar{a} k éléments d'un ensemble \bar{a} j éléments est C_j^k
 $\forall i, n \in \mathbb{I}, +0\mathbb{I}$, _____ C_n^k

$\forall i, j \in \{0, 1\}$ (resp. $n \in \{0, 1\}$) le nombre de parties \bar{a} k éléments d'un ensemble \bar{a} j (resp. n) éléments est 0!

soit $j \in \mathbb{I}, +1\mathbb{I}$. L'événement $\{Y \leq j\}$ est réalisé si et seulement si on a tiré simultanément deux jetons ayant un numéro dans $\mathbb{I}, j\mathbb{I}$.

Alors $\text{card}(\{Y \leq j\}) = C_j^2$. Le pur card $n = C_n^2$.

Alors $\forall j \in \mathbb{I}, +1\mathbb{I}$, $P(Y \leq j) = \frac{C_j^2}{C_n^2} = \frac{j(j-1)/2}{n(n-1)/2} = \frac{j(j-1)}{n(n-1)}$.

puisq : $\forall j \in \mathbb{I}, +1\mathbb{I}$, $P(Y \leq j) = \frac{j(j-1)}{n(n-1)}$ (en effet $P(Y \leq 1) = 0$).

$\forall j \in \mathbb{I}, +1\mathbb{I}$, $P(Y=j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j-1) = \frac{j(j-1)}{n(n-1)} - \frac{(j-1)(j-2)}{n(n-1)} = \frac{(j-1)(j-2+1)}{n(n-1)} = \frac{j(j-1)}{n(n-1)}$.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Y=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \text{ ricomp : } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Y=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \text{ car } P(Y=1) = 0.$$

doit $i \in \llbracket 3, n-3 \rrbracket$.

$\{X \geq i\}$ est réalisé si et seulement si on tire deux jetons dont le numéro appartient à l'ensemble $\llbracket i, n \rrbracket$... qui a $n-i+1$ éléments. $\text{card}(\{X \geq i\}) = \binom{n-i+1}{2}$

$$\text{Ainsi } \forall i \in \llbracket 3, n-3 \rrbracket, P(X \geq i) = \frac{\binom{n-i+1}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-i+1)(n-i)/2}{n(n-1)/2} = \frac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)}$$

$$\text{ricomp } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X \geq i) = \frac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)} \text{ car } P(X \geq n) = 0.$$

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(X=i) = P(X \geq i) - P(X \geq i+1) = \frac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)} - \frac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(X=i) = \frac{n-i}{n(n-1)} [n-i+1 - n+i-1] = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

$$\text{comme } P(X=n) = 0 : \forall i \in \llbracket 3, n \rrbracket, P(X=i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

b) Poser $Z = n+3-X$. $X(\omega) \in \llbracket 3, n-3 \rrbracket$ donc $Z(\omega) \in \llbracket 1, n \rrbracket = Y(\omega)$.

$$\forall j \in Z(\omega), P(Z=j) = P(n+3-X=j) = P(X=n+3-j) = \frac{2(n-(n+3-j))}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = P(Y=j)$$

Ainsi $n+3-X$ et Y ont même loi.

$$\text{Alors } \underline{E(n+3-X) = E(Y)} \text{ et } \underline{V(n+3-X) = V(Y)}$$

$$E(Y) = E(n+3-X) = n+3 - E(X) ; \underline{E(X) = n+3 - E(Y)}$$

$$V(Y) = V(n+3-X) = V(X) ; \underline{V(X) = V(Y)}$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \dots$$

Q3 a) $E(Y) = \sum_{j=2}^n j P(Y=j) = \sum_{j=2}^n \frac{2j(j-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1) = \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$

$E(Y) = \frac{2}{3}(n+1)$ $E(X) = n+1$ $E(Y) = \frac{1}{3}(n+1)$

b) $E(Y(Y-1)) = \sum_{j=2}^n j(j-1) P(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1)(j-1) = \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-1)}{4}$

relation de transfert

$E(Y(Y-1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{2}$ $E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + 2E(Y) = \frac{(n+1)(n-1)}{2} + \frac{4}{3}(n+1)$

$E(Y^2) = \frac{n+1}{6}(3n-6+8) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$

$E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}(n+1)^2$

$V(Y) = \frac{n+1}{18} [9n+6-8n-8] = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$

$V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$

Q4 Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires

X et Y.

a) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq i < j \leq n$.

$(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$ est réalisé si et seulement si on a obtenu le jeton numéroté i et le jeton numéroté j . Ainsi $\text{card}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = 1$.

$P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \frac{1}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n-1)}$

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i < j \leq n \Rightarrow P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \frac{1}{n(n-1)}$

b) $E[X(Y-1)] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n i(j-1) P(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$

$E[X(Y-1)] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} i(j-1) P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} i(j-1) \frac{1}{n(n-1)}$
 $P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$E[X(Y-1)] = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n (j-2) \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n (j-2) \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{j=3}^n j(j-1)(j-2)$$

$$E(X(Y-1)) = \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} = \frac{(n+1)(n-2)}{4} \quad \cdot \quad E[X(Y-1)] = \frac{(n+1)(n-2)}{4}$$

$$E(XY) = E[X(Y-1) + X] = E[X(Y-1)] + E[X] = \frac{(n+1)(n-2)}{4} + \frac{2(n+1)}{3} = \frac{n+1}{12} (3n-6+8)$$

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{n+1}{3} \cdot \frac{2}{3}(n+1) = \frac{n+1}{36} (9n+6-8n-8)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}$$

$$\text{Supposons } n \geq 3. \quad V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-1)}{36} > 0$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{\frac{(n+1)(n-2)}{36}}{\frac{(n+1)(n-1)}{36}} = \frac{1}{2} \quad \rho = \frac{1}{2}$$

Q5) q) soit $j \in \llbracket p, n \rrbracket$. $\{Y \leq j\}$ signifie que l'on a tiré p jetons dont le numéro appartient à $\llbracket 1, j \rrbracket$.

Alors card $\{Y \leq j\} = C_j^p$. Ainsi $P(Y \leq j) = \frac{C_j^p}{C_n^p}$ car card $\Omega = C_n^p$.

$$\text{Supposons que } j > p. \quad P(Y=j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j-1) = \frac{C_j^p}{C_n^p} - \frac{C_{j-1}^p}{C_n^p} = \frac{C_j^p - C_{j-1}^p}{C_n^p} = \frac{C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p}$$

$$\text{si } j=p : P(Y=j) = P(Y \leq j) - \underbrace{P(Y \leq j-1)}_{=0} = P(Y=j) = \frac{C_j^p}{C_n^p} = \frac{C_p^p}{C_n^p} = \frac{1}{C_n^p} = \frac{C_{p-1}^{p-1}}{C_n^p} !$$

$$\text{Finalement : } \forall j \in \llbracket p, n \rrbracket, \quad P(Y \leq j) = \frac{C_j^p}{C_n^p} \quad \text{et} \quad P(Y=j) = \frac{C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p}$$

Soit $i \in \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket$. $\{X \geq i\}$ signifie que les p jetons tirés ont un numéro appartenant à $\llbracket i, n \rrbracket$. Or $\llbracket i, n \rrbracket$ possède $n-i+1$ éléments.

$$\text{Alors } P(X \geq i) = \frac{C_{n-i+1}^p}{C_n^p}.$$

$$\text{Supposons que : } i < n-p+2. \quad P(X=i) = P(X \geq i) - P(X \geq i+1) = \frac{1}{h^p} (C_{n-i}^p - C_{n-i-1}^p) = C_{n-i}^{p-1} / C_n^p.$$

$$\text{Supposons } i = n-p+2. \quad P(X=i) = P(X \geq i) - \underbrace{P(X \geq i+1)}_{=0} = P(X \geq i) = P(X \geq n-p+2) = \frac{C_p^p}{C_n^p} = \frac{1}{C_n^p} = C_{n-(n-p+1)}^{p-1} / C_n^p$$

$$\text{Finalement : } \forall i \in \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket, \quad P(X \geq i) = \frac{C_{n-i+1}^p}{C_n^p} \text{ et } P(X=i) = \frac{C_{n-i}^{p-1}}{C_n^p}.$$

$$D) \quad X(R) = \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket. \quad (n+1-X)(R) = \llbracket p, n \rrbracket = Y(R).$$

$$\forall j \in \llbracket p, n \rrbracket, \quad P(n+1-X=j) = P(X=n+1-j) = \frac{C_{n-(n+1-j)}^{p-1}}{C_n^p} = \frac{C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p} = P(Y=j).$$

Ainsi $n+1-X$ et Y ont même loi.

$$\text{Si donc : } \underline{E(X) = n+1 - E(Y)} \text{ et } \underline{V(X) = V(Y)}.$$

Q6) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y .

$$a) \quad \underline{j C_{j-1}^{p-1} = \frac{j(j-1)!}{(p-1)!(p-j)!} = p \frac{j!}{p!(p-j)!} = p \binom{j}{p} \text{ pour tout } j \in \llbracket p, n \rrbracket.$$

$$E(Y) = \sum_{j=p}^n \frac{j C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p} = \sum_{j=p}^n \frac{p \binom{j}{p}}{C_n^p} = \frac{p}{C_n^p} \sum_{j=p}^n \binom{j}{p} = \frac{p}{C_n^p} C_{n+1}^{p+1} = \frac{p}{C_n^p} \frac{n+1}{p+1} C_n^p = \frac{p(n+1)}{p+1}.$$

$$\underline{E(Y) = \frac{p(n+1)}{p+1}}. \quad E(X) = n+1 - E(Y) = (n+1) \left(1 - \frac{p}{p+1} \right) = \frac{n+1}{p+1}. \quad \underline{E(X) = \frac{n+1}{p+1}}.$$

$$b) \text{ Soit } j \in \llbracket p, n \rrbracket. \quad (j+1) \binom{j}{p-1} = (j+1) \frac{j!}{(p-1)!(j-p)!} = \frac{(j+1)!}{p!(j-p)!} = p \binom{j+1}{p} = p \binom{j+1}{p+1} \frac{(j+1)!}{(j+1)!(j-p+1)!} = p \binom{j+1}{p+1}.$$

$$\underline{(j+1) \binom{j}{p-1} = p \binom{j+1}{p+1}}.$$

$$E[Y(Y+1)] = \sum_{j=p}^n j(j+1)P(Y=j) = \sum_{j=p}^n \frac{j(j+1)C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p} = \frac{1}{C_n^p} P(p+1) \sum_{j=p}^n C_{j+1}^{p+1}$$

$$E[Y(Y+1)] = P(p+1) \frac{1}{C_n^p} \sum_{k=p+1}^{n+1} C_k^{p+1} = P(p+1) \frac{1}{C_n^p} C_{n+1}^{p+1} = P(p+1) \frac{1}{C_n^p} \frac{(n+1)(n+1)}{(p+1)(p+1)} C_n^p$$

$$E[Y(Y+1)] = \frac{P(n+1)(n+1)}{p+1}$$

$$E(Y^2) = E[Y(Y+1) - Y] = E[Y(Y+1)] - E[Y] = \frac{P(n+1)(n+1)}{p+1} - \frac{P(n+1)}{p+1} = \frac{P(n+1)[(n+1)(p+1) - (p+1)]}{(p+1)(p+1)}$$

$$E(Y^2) = \frac{P(n+1)(np+2p+n+2-p-1)}{(p+1)(p+1)} = \frac{P(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+1)}$$

$$E(Y^2) = \frac{P(n+1)(n+p+n+p)}{(p+1)(p+1)}$$

$$V(X) = V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{P(n+1)(n+p+n+p)}{(p+1)(p+1)} - \left(\frac{P(n+1)}{p+1}\right)^2 = \frac{P(n+1)}{p+1} \left(\frac{np+n+p}{p+1} - \frac{P(n+1)}{p+1}\right)$$

$$V(X) = V(Y) = \frac{P(n+1)}{p+1} \frac{[np+n+p+p^2+n+n+p - p^2n - p^2 - 2pn - 2p]}{(p+1)(p+1)} = \frac{P(n+1)}{(p+1)^2(p+1)} (n-p)$$

$$V(X) = V(Y) = \frac{P(n+1)(n-p)}{(p+1)^2(p+1)}$$

Q7 Covariance et coefficient de corrélation linéaire de variables aléat. X et Y .

o] Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que: $p \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j - p + 1$.

Dans cette question nous supposons $p \geq 2$

$(X=i) \cap (Y=j)$ est réalisé si et seulement si on a obtenu les jetons numérotés i et j et $p-2$ jetons dont le numéro appartient à $\llbracket i+1, j-1 \rrbracket$.

$\llbracket i+1, j-1 \rrbracket$ possède $j-1-i$ éléments ainsi $\text{card}((X=i) \cap (Y=j)) = C_{j-i-1}^{p-2}$.

$$\text{Alors } P((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{C_{j-i-1}^{p-2}}{C_n^p} \text{ si } (i, j) \in \mathbb{N}^2; p \leq j \leq n \text{ et } 1 \leq i \leq j - p + 1.$$

Remarque ... $P(X=i \cap Y=j) = 0$ si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et si l'un n'a pas $p \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j-p+1$.

$$b) E[(Y+1)(Y-X)] = \sum_{i=1}^{n-p+1} \sum_{j=p}^n (j+1)(j-i) P(X=i \cap Y=j) = \sum_{j=p}^n \sum_{i=1}^{j-p+1} (j+1)(j-i) P(X=i \cap Y=j).$$

$$\text{rien sup: } E[(Y+1)(Y-X)] = \sum_{j=p}^n \sum_{i=1}^{j-p+1} (j+1)(j-i) \frac{C_{j-i-1}^{p-2}}{C_n^p} = \frac{p-1}{C_n^p} \sum_{j=p}^n (j+1) \sum_{i=1}^{j-p+1} C_{j-i}^{p-1}$$

$$(j-i) C_{j-i-1}^{p-2} = (p-1) C_{j-i}^{p-1}$$

$$a) \sum_{i=1}^{j-p+1} C_{j-i}^{p-1} = \sum_{k=p-1}^{j-1} C_k^{p-1} = C_j^p \quad \text{pour tout } j \in \llbracket p, n \rrbracket.$$

$$\text{Alors } E[(Y+1)(Y-X)] = \frac{p-1}{C_n^p} \sum_{j=p}^n (j+1) C_j^p = \frac{p-1}{C_n^p} (p+1) \sum_{j=p}^n C_{j+1}^{p+1} = \frac{p-1}{C_n^p} (p+1) C_{n+2}^{p+2}$$

$$E[(Y+1)(Y-X)] = \frac{(p-1)(p+1)}{C_n^p} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{(p+2)(p+1)} C_n^p = \frac{(p-1)(n+2)(n+1)}{p+2}.$$

$$E[(Y+1)(Y-X)] = \frac{(p-1)(n+2)(n+1)}{p+2}.$$

$$(Y+1)(Y-X) = Y^2 - XY + Y - X. \quad XY = Y^2 + Y - X - (Y+1)(Y-X)$$

$$E(XY) = E(Y^2) + E(Y) - E(X) - E[(Y+1)(Y-X)] = \frac{p(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+2)} + \frac{p(n+1)}{p+1} - \frac{n+1}{p+1} - \frac{(p-1)(n+2)(n+1)}{p+2}$$

$$E(XY) = \frac{n+1}{(p+1)(p+2)} [np^2 + np + p^2 + p^2 + 2p - p - 2 + pn + 4 - 4p^2 + 2] = \frac{n+1}{(p+1)(p+2)} (np + n + p)$$

$$E(XY) = \frac{(n+1)[(p+1)(n+p)]}{(p+2)(p+2)}.$$

$$c) \text{COV}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+2)} - \frac{p(n+1)}{p+1} \cdot \frac{n+1}{p+1} = \frac{(n+1)[(p+2)(np+n+p) - p(n+1)(p+2)]}{(p+2)(p+1)^2}$$

$$\text{COV}(X, Y) = \frac{n+1}{(p+2)(p+1)^2} [np^2 + np + p^2 + np + n + p - np^2 - 2np - p^2 - 2p], \quad \text{COV}(X, Y) = \frac{(n+1)(n-p)}{(p+2)(p+1)^2}.$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{(n+1)(n-p)}{(p+2)(p+3)^2} \times \left[\frac{p(n+1)(n-p)}{(p+1)^2(p+2)} \right]^{-1} = \frac{1}{p} \dots \text{si } n > p.$$

si $n > p$: $\rho = \frac{1}{p}$.

Q8) a) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j) i (1+u)^{i-1} (1+v)^j$.

$$\frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j) i = \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n P(X=i \cap Y=j).$$

$(Y=j)_{j \in \mathbb{I}_n}$ est un système complet d'événements donc $\sum_{j=1}^n P(X=i \cap Y=j) = P(X=i)$.

$$\frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) = \sum_{i=1}^n i P(X=i) = E(X).$$

$\frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) = E(X)$. De même $\frac{\partial G}{\partial v}(0, 0) = E(Y)$.

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n P(X=i \cap Y=j) i(i-1) (1+u)^{i-2} (1+v)^j$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0, 0) = \sum_{i=2}^n i(i-1) \sum_{j=1}^n P(X=i \cap Y=j) = \sum_{i=2}^n i(i-1) P(X=i) = E[X(X-1)].$$

$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0, 0) = E[X(X-1)]$. De même $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0, 0) = E[Y(Y-1)]$.

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j) i (1+u)^{i-1} (1+v)^j$$

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j) ij (1+u)^{i-1} (1+v)^{j-1}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(0, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j) ij \quad \underline{\underline{\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(0, 0) = E(XY)}}.$$

b) $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = u + v + uv$. De plus $u \neq 0, v \neq 0$ et $\omega \neq 0$.

$$G(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) (1+u)^i (1+v)^j$$

$$G(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} (1+u)^i (1+v)^j = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (1+v)^j \sum_{i=1}^{j-1} (1+u)^i$$

$$G(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (1+v)^j (1+u) \times \frac{1 - (1+u)^{j-1}}{1 - (1+u)}$$

$1+u \neq 1$

$$G(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{(1+u)}{(1-u)} \sum_{j=1}^n (1+v)^j - \frac{2}{n(n-1)} \frac{1}{(1-u)} \sum_{j=1}^n \underbrace{((1+v)(1+u))^j}_{1+w}$$

$$G(u, v) = \frac{2(1+u)(1+v)}{n(n-1)u} \frac{1 - (1+v)^n}{1 - (1+v)} + \frac{2}{n(n-1)u} (1+w) \frac{1 - (1+w)^n}{1 - (1+w)}$$

$1+v \neq 0$
 $1+w \neq 0$

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left[\frac{1 - (1+w)^n}{-w} - \frac{1 - (1+v)^n}{-v} \right]$$

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left[\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v} \right]$$

$$\frac{(1+w)^n - 1}{w} = \frac{1}{w} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^k - 1 \right] = \frac{1}{w} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w^{k-1}$$

De même $\frac{(1+v)^n - 1}{v} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} v^{k-1}$

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (w^{k-1} v^{k-1}) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (w^{k-1} v^{k-1})$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^p - b^p = (a-b) \sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i} \text{ dnc}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, w^k - v^k = (w-v) \sum_{i=0}^{k-1} w^i v^{k-1-i} = (w-v) \sum_{i=0}^{k-1} w^i v^{k-1-i}$$

$$G(u, v) = \frac{2(1+v)(1+w)}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n \left(\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k-2} w^i v^{k-1-i} \right)$$

Remarque.. Pour $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $H(u,v) = \sum_{k=2}^n \left(C_k^k \sum_{i=0}^{k-2} (u+v+uv)^i v^{k-1-i} \right) = \sum_{k=2}^n \left(C_k^k \sum_{i=0}^{k-2} \omega^i v^{k-1-i} \right)$
 $\omega = u+v+uv$

Alors si $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et si $\omega = u+v+uv$, $u \neq 0, v \neq 0, \omega \neq 0$: $G(u,v) = \frac{2(1+v)(1+\omega)}{n(n-1)} H(u,v)$

$(u,v) \rightarrow G(u,v)$ et $(u,v) \rightarrow \frac{2(1+v)(1+u+v+uv)}{n(n-1)} H(u,v)$ états polynômes

qui coïncident sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u=0 \text{ ou } v=0 \text{ ou } u+v+uv=0\}$, elle sont égales sur \mathbb{R}^2 .

Ainsi $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $G(u,v) = \frac{2(1+v)(1+u+v+uv)}{n(n-1)} H(u,v)$.

ou $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\omega = u+v+uv \Rightarrow G(u,v) = \frac{2(1+v)(1+\omega)}{n(n-1)} H(u,v) = \frac{2(1+v)(1+\omega)}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n \left(C_k^k \sum_{i=0}^{k-2} \omega^i v^{k-1-i} \right)$

cl $\frac{\partial \omega}{\partial u} = 1+v$ et $\frac{\partial \omega}{\partial v} = 1+u$.

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = u+v+uv$.

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \frac{2(1+v)}{n(n-1)} \left[(1+v) H(u,v) + (1+u) \frac{\partial H}{\partial u}(u,v) \right]$$

Alors $E(X) = \frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = \frac{2}{n(n-1)} \left[H(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) \right]$.

Noter que si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\omega^p v^q = \begin{cases} 1 \text{ si } p=q=0 \text{ et } u=v=0 \\ 0 \text{ si } (p,q) \neq (0,0) \text{ et } u=v=0 \end{cases}$

Alors $H(0,0) = C_n^2$ car $\sum_{i=0}^{k-2} \omega^i v^{k-1-i} = \begin{cases} 0 \text{ si } k > 2, u=v=0 \\ 1 \text{ si } k=2, u=v=0 \end{cases} \left. \begin{matrix} i=0, k-1-i=0 \\ \updownarrow \\ i=0, k=2 \end{matrix} \right\}$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) = \sum_{k=2}^n C_k^k \sum_{i=1}^{k-2} i(1+v) \omega^{i-1} v^{k-1-i}$$

$\frac{\partial \omega}{\partial u} = 1+v$

$$u \sum_{i=1}^{k-2} i(1+v) \omega^{i-1} v^{k-1-i} = \begin{cases} 0 \text{ si } k=2, u=v=0 \\ 0 \text{ si } k > 3, u=v=0 \\ 1 \text{ si } k=3, u=v=0 \end{cases} \left. \begin{matrix} i-1 = k-1-i=0 \\ \updownarrow \\ i=1 \text{ et } k=3 \end{matrix} \right\}$$

Ainsi $\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) = C_n^3$.

Finde $E(X) = \frac{2}{n(n-1)} [C_n^2 + C_n^3] = \frac{2}{n(n-1)} C_{n+1}^3 = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} = \frac{n+1}{3}$

$E(X) = \frac{n+1}{3}$

$\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} [(1+v)H(u, v) + (1+u)(1+v)H(u, v) + (1+v)(1+u) \frac{\partial H}{\partial v}(u, v)]$

$E(Y) = \frac{\partial G}{\partial v}(0, 0) = \frac{2}{n(n-1)} [H(0, 0) + H(0, 0) + \frac{\partial H}{\partial v}(0, 0)] = \frac{2}{n(n-1)} [2C_n^2 + \frac{\partial H}{\partial v}(0, 0)]$

$\frac{\partial H}{\partial v}(u, v) = \sum_{k=2}^n C_n^k \left(\sum_{i=1}^{k-2} i(1+u)\omega^{i-1} v^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-3} \omega^i (k-2-i) v^{k-3-i} \right)$
 $= \begin{cases} 0 & \text{if } k=2, u=v=0 \\ 0 & \text{if } k>3, u=v=0 \\ 1 & \text{if } k=3, u=v=0 \end{cases}$

$\frac{\partial H}{\partial v}(0, 0) = C_n^3 (1+1) = 2C_n^3$

Also $E(Y) = \frac{2}{n(n-1)} [2C_n^2 + 2C_n^3] = 2 \frac{2}{n(n-1)} [C_n^2 + C_n^3] = 2E(X) = \frac{2}{3}(n+1)$

$E(Y) = \frac{2}{3}(n+1)$

$\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \frac{2(1+v)}{n(n-1)} [(1+v)H(u, v) + (1+u) \frac{\partial H}{\partial u}(u, v)]$

$\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} [(1+v)H(u, v) + (1+u) \frac{\partial H}{\partial u}(u, v)] + \frac{2(1+v)}{n(n-1)} [(1+u) \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) + (1+u) \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u, v)]$

$E(XY) = \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(0, 0) = \frac{2}{n(n-1)} [H(0, 0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0, 0) + H(0, 0) + \frac{\partial H}{\partial v}(0, 0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0, 0) + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0, 0)]$

$E(XY) = \frac{2}{n(n-1)} [2H(0, 0) + 2 \frac{\partial H}{\partial u}(0, 0) + \frac{\partial H}{\partial v}(0, 0) + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0, 0)]$

$E(XY) = \frac{2}{n(n-1)} [2C_n^2 + 2C_n^3 + 2C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0, 0)] = \frac{2}{n(n-1)} [2C_n^2 + 4C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0, 0)]$

calculare $\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0, 0)$.

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u, v) = \sum_{k=2}^n C_k^k \sum_{i=1}^{k-2} i (1+v) \omega^{i-1} v^{k-2-i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u, v) = \sum_{k=2}^n C_k^k \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{k-2} i \omega^{i-1} v^{k-1-i}}_{\substack{0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=2 \\ 0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=3 \\ 3 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=3}} + \underbrace{\sum_{i=2}^{k-2} i(1+v)(i-1)(1+u) \omega^{i-2} v^{k-i}}_{\substack{0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k \neq 4 \\ 2 \times 1 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=4 \\ i-2 = k-2-i = 0 \text{ et } i=2 \\ k=4}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-3} i(1+v) \omega^{i-1} (k-2-i) v^{k-3-i}}_{\substack{0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k \neq 4 \\ 1 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=4 \\ i-1 = k-3-i = 0 \text{ et } i=1 \\ k=4}}$$

Alors $\frac{\partial H}{\partial v}(0, 0) = C_2^2 + 2C_3^3 + C_4^4 = C_2^2 + 3C_3^3$

Alors $E(XY) = \frac{2}{n(n-1)} [2C_2^2 + 4C_3^3 + C_4^4 + 3C_4^4] = \frac{2}{n(n-1)} [2C_2^2 + 5C_3^3 + 3C_4^4]$

$$E(XY) = \frac{2}{n(n-1)} [2C_2^2 + 2C_3^3 + 3C_3^3 + 3C_4^4] = \frac{2}{n(n-1)} [2C_{n+1}^3 + 3C_{n+1}^4] = \frac{2}{n(n-1)} [2C_{n+2}^4 + C_{n+1}^4]$$

$$E(XY) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{1}{4!} [2n(n+2)(n+1)n(n-1) + (n+1)n(n-1)(n-2)]$$

$$E(XY) = \frac{1}{32} (n+1) [2(n+2) + n-2] ; \underline{\underline{E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{32}}}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{32} - \frac{n+1}{3} \cdot \frac{2(n+1)}{3} = \frac{n+1}{36} [9n+6-8n-8]$$

$$\underline{\underline{\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}}}$$

Ne reste plus qu'à calculer $E(X^2)$, $V(X)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$.

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \frac{2(1+v)}{n(n-1)} [(1+v)H(u, v) + (1+u) \frac{\partial H}{\partial u}(u, v)]$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u, v) = \frac{2(1+v)}{n(n-1)} \left[(1+v) \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) + (1+v) \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) + (1+v) \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) \right].$$

$$E[X(X-1)] = \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0, 0) = \frac{2}{n(n-1)} \left[2 \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0, 0) \right] = \frac{2}{n(n-1)} \left[2 C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0, 0) \right].$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u, v) = \sum_{k=2}^n C_n^k \sum_{i=2}^{k-2} i(1+v) \omega^{i-1} v^{k-i} \quad ; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) = \sum_{k=2}^n C_n^k \sum_{i=3}^{k-2} i(i-1)(1+v)^2 \omega^{i-2} v^{k-i}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0, 0) = 2 C_n^4.$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq 4, u=v=0 \\ 2 & \text{if } k=4, u=v=0 \end{cases}$$

$$E[X(X-1)] = \frac{2}{n(n-1)} [2 C_n^3 + 2 C_n^4] = \frac{4}{n(n-1)} C_{n+1}^4 = \frac{4}{n(n-1)} \frac{(n+1)v(n-1)(n-2)}{24} = \frac{1}{6}(n+1)(n-2).$$

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X] = \frac{1}{6}(n+1)(n-2) + \frac{1}{3}(n+1) = \frac{1}{6}(n+1)(n-2+2) = \frac{n(n+1)}{6}.$$

$$E[X^2] = \frac{n(n+1)}{6}. \quad V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{n(n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{3}\right)^2 = \frac{n+1}{18} (3n - 2n - 2).$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} \left[(1+v)H(u, v) + (1+v)(1+u)H(u, v) + (1+v)(1+u) \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) \right].$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} \left[2(1+u)(1+v)H(u, v) + (1+v)^2(1+u) \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) \right] \text{ car } (1+v) = (1+u)(1+v).$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} \left[2(1+u)H(u, v) + 2(1+u)(1+v) \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) + 2(1+v)(1+u) \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) + (1+v)^2(1+u) \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u, v) \right].$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0, 0) = \frac{2}{n(n-1)} \left[2H(0, 0) + 4 \frac{\partial H}{\partial v}(0, 0) + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0, 0) \right] = \frac{2}{n(n-1)} \left[2 C_n^2 + 8 C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0, 0) \right].$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u, v) = \sum_{k=2}^n C_n^k \left(\sum_{i=1}^{k-2} i(1+u) \omega^{i-1} v^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-3} \omega^i (k-i) v^{k-1-i} \right)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u, v) = \sum_{k=2}^n C_n^k \left[\sum_{i=2}^{k-2} i(i-1)(1+u)^2 \omega^{i-2} v^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-3} i(k-i)(1+u) \omega^{i-1} v^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-4} \omega^i (k-i)(k-1-i) \omega^{k-1-i} \right]$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0, 0) = 2 C_n^4 + C_n^4 + C_n^4 + 2 C_n^4 = 6 C_n^4.$$

$$E[(Y-1)] = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(0,0) = \frac{\lambda}{n(n-1)} [2\lambda^2 + 8\lambda^3 + 6\lambda^4] = 2\lambda \frac{\lambda}{n(n-1)} [\lambda^2 + \lambda^3 + 3\lambda^3 + 3\lambda^4].$$

$$E[(Y-1)] = \frac{\lambda}{n(n-1)} [\lambda_{n+1}^3 + 3\lambda_{n+1}^4] = \frac{\lambda}{n(n-1)} \left[\frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + 3 \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{4!} \right]$$

$$E[(Y-1)] = \lambda \left[\frac{n+1}{3} + \frac{(n+1)(n-1)}{4} \right] = \frac{n+1}{6} [4 + 3(n-1)] = \frac{(n+1)(3n-2)}{6}.$$

$$E(Y^2) = E[(Y-1)^2] + E(Y) = \frac{(n+1)(3n-2)}{6} + \frac{\lambda}{3}(n+1) = \frac{n+1}{6} [3n-2+4] = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$$

$$E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}. \quad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \left(\frac{\lambda(n+1)}{3}\right)^2$$

$$V(Y) = \frac{n+1}{18} (9n+6-8n-8); \quad V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{38}.$$

Suppose $n > 2$. $V(Y) = V(Y) > 0$.

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{(n+1)(n-1)/36}{(n+1)(n-1)/38} = \frac{1}{2}. \quad \underline{\underline{\rho = \frac{1}{2}}}$$