
EXERCICE 1

1) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

• Par définition E est contenu dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 0$. f_0 est de toute évidence un élément de E donc E n'est pas vide.

• Soient φ_1 et φ_2 deux éléments de E et soit λ un réel. $\lambda \varphi_1 + \varphi_2$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda \varphi_1 + \varphi_2)''(x) = \lambda \varphi_1''(x) + \varphi_2''(x) = \lambda(1+x^2)\varphi_1(x) + (1+x^2)\varphi_2(x) = (1+x^2)(\lambda \varphi_1 + \varphi_2)(x).$$

Ainsi $\lambda \varphi_1 + \varphi_2$ est un élément de E .

Ceci achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors :

E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

2) Soient u et v deux éléments de E . u et v sont deux fois dérivables sur \mathbb{R} donc $u'v - uv'$ est dérivable sur \mathbb{R} . Ainsi pour montrer que $u'v - uv'$ est constante sur \mathbb{R} , il suffit de prouver que sa dérivée est nulle sur \mathbb{R} (puisque \mathbb{R} est un intervalle...).

$$(u'v - v'u)' = u''v + u'v' - v''u - v'u' = u''v - v''u.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (u'v - v'u)'(x) = u''(x)v(x) - v''(x)u(x) = (1+x^2)u(x)v(x) - (1+x^2)v(x)u(x) = 0.$$

$(u'v - v'u)'$ est nulle sur \mathbb{R} donc

$u'v - v'u$ est une fonction constante.

3) a. $x \rightarrow \frac{x^2}{2}$ et $x \rightarrow e^x$ sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} donc par composition f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}}. \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)f(x).$$

f est un élément de E .

b. Observons que $\frac{1}{f}$ est (au moins) de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} car f ne s'annule pas sur \mathbb{R} et y est de classe \mathcal{C}^2 .

$$\text{Ainsi } \frac{1}{f^2} \text{ est (au moins) de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}. \text{ Posons alors : } \forall x \in \mathbb{R}, \ell(x) = \int_0^x \frac{1}{(f(t))^2} dt.$$

ℓ est la primitive de $\frac{1}{f^2}$ sur \mathbb{R} qui prend la valeur 0 en 0. Donc ℓ' est de classe \mathcal{C}^2 (au moins) sur \mathbb{R} . Ceci suffit très largement pour dire que ℓ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Alors $g = f \ell$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

$$g'' = f''\ell + 2f'\ell' + f\ell'' = f''\ell + 2f'\frac{1}{f^2} + f\left(\frac{1}{f^2}\right)' = f''\ell + 2\frac{f'}{f^2} + f\left(-\frac{2f'}{f^3}\right) = f''\ell.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = f''(x)\ell(x) = (1+x^2)f(x)\ell(x)$ car f est un élément de E .

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = (1+x^2)f(x)\ell(x) = (1+x^2)g(x)$.

g est un élément de E .

4) a. Soit h un élément de E . Comme f appartient également à E , $h'f - f'h$ est constante sur \mathbb{R} .

Il existe donc un réel μ tel que : $h'f - f'h = \mu$. Comme f ne s'annule pas sur \mathbb{R} , $\frac{h'f - f'h}{f^2} = \frac{\mu}{f^2} = \mu\ell'$.

Ainsi $\left(\frac{h}{f}\right)' = (\mu\ell)'$ et on peut donc dire que $\frac{h}{f}$ et $\mu\ell$ diffèrent d'une constante.

Alors il existe un réel λ tel que : $\frac{h}{f} = \mu\ell + \lambda$. Ce qui donne encore $h = \lambda f + \mu f\ell$ ou $h = \lambda f + \mu g$.

Si h est un élément de E , h est combinaison linéaire de f et g .

b. D'après ce qui précède, f et g sont deux éléments de E et tout élément de E est combinaison linéaire de f et de g donc (f, g) est une famille génératrice de E . Montrons que cette famille est libre.

Soient λ et μ deux éléments de \mathbb{R} tels que $\lambda f + \mu g = 0_E$.

En particulier $\lambda f(0) + \mu g(0) = 0$. Comme $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$: $\lambda = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x \frac{1}{(f(t))^2} dt = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu \int_0^x \frac{1}{(f(t))^2} dt = 0$.

En dérivant on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu \frac{1}{(f(x))^2} = 0$ donc nécessairement $\mu = 0$.

$\lambda f + \mu g = 0_E$ fournit donc $\lambda = \mu = 0$. La famille (f, g) est libre. Finalement

(f, g) est une base de E .

EXERCICE 2

1) a. Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$$w_n - w_{n+1} = v_n - \ln n - v_{n+1} + \ln(n+1) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + v_n - v_{n+1} = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

La fonction \ln est concave donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes ; en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = (\ln' 1)(x-1) + \ln 1$ ou $y = x-1$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln x \leq x-1$.

Ceci permet d'écrire : $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}$.

Ce qui donne : $0 \leq -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} = w_n - w_{n+1}$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n - w_{n+1} \geq 0.}$$

b. Le cours donne $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Il fournit également $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ donc $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$.

Alors $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} - x + x^2 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$$\boxed{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + o(x^2).}$$

c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} = w_n - w_{n+1}$. Alors

$$\boxed{w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

2) a. Ce qui précède montre que : $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n - w_{n+1} \geq 0$ et la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ est convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } w_n - w_{n+1} \text{ est convergente.}}$$

b. $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $w_n = (w_n - w_1) + w_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) + w_1 = -\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1$.

La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1})$ converge car la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ converge.

Par conséquent la suite de terme général $-\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1$ converge. Alors :

$$\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n \geq 1} \text{ converge.}}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 \geq n^2$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que :

la série de terme général u_n converge.

4) a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

Soient a, b et c trois réels.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1)}{n(n+1)(2n+1)}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ si et seulement si $2a+2b+c=0$, $3a+b+c=0$ et $a=6$.

$$\text{De plus : } \begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ 2b+c=-12 \\ b+c=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-12-(-18)=6 \\ c=-18-b=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases}.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$$v_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + 1 = \frac{1}{2} v_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + 1.$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2} v_n - 1.$$

c. Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} \right) = 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 24 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = 6v_n + 6 \left(v_n + \frac{1}{n+1} - 1 \right) - 24 \left(v_{2n+1} - \frac{1}{2} v_n - 1 \right) = 12v_n - \frac{6n}{n+1} - 24v_{2n+1} + 12v_n + 24.$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}.$$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - v_{2n+1} = w_n + \ln n - w_{2n+1} - \ln(2n+1) = w_n - w_{2n+1} - \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right).$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - v_{2n+1}) = \gamma - \gamma - \ln 2 = -\ln 2$. En remarquant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n}{n+1} = 6$ on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = 24(-\ln 2) + 24 - 6 = 18 - 24 \ln 2. \text{ Ce qui donne :}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 18 - 24 \ln 2.$$

EXERCICE 3

1) $\varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0) = (0, -c, b) = -ce_2 + be_3$. $\varphi(e_2) = \varphi(0, 1, 0) = (c, 0, -a) = ce_1 - ae_3$. $\varphi(e_3) = \varphi(0, 0, 1) = (-b, a, 0) = -be_1 + ae_2$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

2) a. $\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb - bc \\ -ca + ac \\ ba - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; ainsi $\varphi(\omega) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

ω appartient à $\text{Ker } \varphi$.

b. Soient α et β deux réels tels que $\alpha \varphi(e_1) + \beta \varphi(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\alpha(-ce_2 + be_3) + \beta(ce_1 - ae_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et donc } \beta ce_1 - \alpha ce_2 + (\alpha b - \beta a) e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) étant libre ceci donne : $\beta c = \alpha c = \alpha b - \beta a = 0$.

Comme c n'est pas nul on obtient $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \varphi(e_1) + \beta \varphi(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

La famille $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est libre.

c. $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une famille libre de $\text{Im } \varphi$ donc la dimension de $\text{Im } \varphi$ est supérieure ou égale à 2.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } \varphi = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg } \varphi = 3 - \text{rg } \varphi$.

Ainsi $\dim \text{Ker } \varphi \leq 3 - 2 = 1$. De plus ω est un élément non nul de $\text{Ker } \varphi$ donc $\dim \text{Ker } \varphi \geq 1$.

Finalement $\dim \text{Ker } \varphi = 1$. $\text{Ker } \varphi$ est donc une droite vectorielle. Mieux c'est la droite vectorielle engendrée par ω .

$\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(\omega)$.

3) a. Soit u un élément de \mathbb{R}^3 de matrice $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base orthonormale \mathcal{B} .

$$(\varphi(u) / \omega) = {}^t(MU)W = (yc - zb, za - xc, xb - ya) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (yc - zb)a + (za - xc)b + (xb - ya)c.$$

$$(\varphi(u) / \omega) = yca - zba + zab - xcb + xbc - yac = 0.$$

On peut également obtenir le résultat en remarquant que ${}^tM = -M$ (M est antisymétrique).

En effet : $(\varphi(u) / \omega) = {}^t(MU)W = {}^tU{}^tMW = -{}^tUMW = -(u / \varphi(\omega)) = -(u / 0_{\mathbb{R}^3}) = 0$.

Pour tout vecteur u de \mathbb{R}^3 , $(\varphi(u) / \omega) = 0$.

b. Ce qui précède montre que tout élément de $\text{Im } \varphi$ est orthogonal à ω .

Comme ω engendre $\text{Ker } \varphi$: $\text{Im } \varphi \subset (\text{Ker } \varphi)^\perp$. De plus $\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } \varphi = \dim(\text{Ker } \varphi)^\perp$. Alors

$$\text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp.$$

4) a. Il s'agit de montrer que $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ sont supplémentaires. Ceci est un résultat de cours dans la mesure où $\text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp$.

Pour tout vecteur u de \mathbb{R}^3 , il existe un unique couple (u_1, u_2) élément de $\text{Ker } \varphi \times \text{Im } \varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

b. Soit u un élément de \mathbb{R}^3 et (u_1, u_2) l'unique élément de $\text{Ker } \varphi \times \text{Im } \varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

u_2 appartient à $\text{Im } \varphi$ donc u_2 est orthogonal à $\text{Ker } \varphi$ donc à ω .

Ainsi $(u / \omega) = (u_1 + u_2 / \omega) = (u_1 / \omega) + (u_2 / \omega) = (u_1 / \omega) + 0 = (u_1 / \omega)$.

$$(u / \omega) = (u_1 / \omega).$$

c. Soit u un élément de \mathbb{R}^3 et (u_1, u_2) l'unique élément de $\text{Ker } \varphi \times \text{Im } \varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

u_1 appartient à $\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(\omega)$. Alors il existe un réel λ tel que $u_1 = \lambda\omega$.

$$(u / \omega) = (u_1 / \omega) = (\lambda\omega / \omega) = \lambda(\omega / \omega) = \lambda\|\omega\|^2.$$

Ainsi $\lambda = \frac{(u / \omega)}{\|\omega\|^2}$ et $u_1 = \frac{(u / \omega)}{\|\omega\|^2} \omega$. Alors $u_2 = u - u_1 = u - \frac{(u / \omega)}{\|\omega\|^2} \omega$.

$$u_1 = \frac{(u / \omega)}{\|\omega\|^2} \omega \text{ et } u_2 = u - \frac{(u / \omega)}{\|\omega\|^2} \omega.$$

5) a.
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2 - a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{pmatrix}.$$

$$M^3 = MM^2 = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2 - a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{pmatrix}.$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -c(c^2 + a^2 + b^2) & b(c^2 + b^2 + a^2) \\ c(c^2 + b^2 + a^2) & 0 & -a(c^2 + b^2 + a^2) \\ -b(c^2 + b^2 + a^2) & a(b^2 + c^2 + a^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{M^3 = -\|\omega\|^2 M.}$$

b. Il résulte de la question précédente que : $\varphi^3 = -\|\omega\|^2 \varphi$.

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi \circ \varphi)(\varphi(u)) = \varphi^3(u) = -\|\omega\|^2 \varphi(u)$.

Ce qui donne encore :

$$\boxed{\forall v \in \text{Im } \varphi, (\varphi \circ \varphi)(v) = -\|\omega\|^2 v.}$$

c. Soit u un élément de \mathbb{R}^3 et (u_1, u_2) l'unique élément de $\text{Ker } \varphi \times \text{Im } \varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

u_1 est dans $\text{Ker } \varphi$ donc $\varphi^2(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$. u_2 est dans $\text{Im } \varphi$ donc $\varphi^2(u_2) = -\|\omega\|^2 u_2$.

Alors $\varphi^2(u) = \varphi^2(u_1 + u_2) = \varphi^2(u_1) + \varphi^2(u_2) = -\|\omega\|^2 u_2$.

Or $u_2 = u - \frac{(u/\omega)}{\|\omega\|^2} \omega$. Donc $\varphi^2(u) = -\|\omega\|^2 \left(u - \frac{(u/\omega)}{\|\omega\|^2} \omega \right) = -\|\omega\|^2 u + (u/\omega) \omega$.

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^3, (\varphi \circ \varphi)(u) = -\|\omega\|^2 u + (u/\omega) \omega.}$$

PROBLÈME

1) a. X est la variable aléatoire égale au nombre de résultats non obtenus à l'issue des n épreuves.

Pour tout élément i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon. Ainsi la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_r$ est égale au nombre de variables aléatoires de la suite (X_1, X_2, \dots, X_r) ayant pris la valeur 1 à l'issue des n épreuves ; c'est à dire au nombre de résultats non obtenus à l'issue des n épreuves. Finalement :

$$\boxed{X = X_1 + X_2 + \dots + X_r.}$$

b. Soit i un élément de $\llbracket 1, r \rrbracket$. Pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ notons B_i^k l'événement le résultat R_i n'est pas obtenu à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

Les événements $B_i^1, B_i^2, \dots, B_i^n$ sont indépendants.

Alors $P(X_i = 1) = P(B_i^1 \cap B_i^2 \cap \dots \cap B_i^n) = P(B_i^1) P(B_i^2) \dots P(B_i^n) = (1 - x_i)(1 - x_i) \dots (1 - x_i) = (1 - x_i)^n$.

Pour tout élément i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $P(X_i = 1) = (1 - x_i)^n$ et $P(X_i = 0) = 1 - (1 - x_i)^n$.

c. $X = \sum_{i=1}^r X_i$. La linéarité de l'espérance donne alors : $E(X) = \sum_{i=1}^r E(X_i)$.

Or, pour tout élément i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $E(X_i) = P(X_i = 1) = (1 - x_i)^n$. Ainsi

$$E(X) = \sum_{i=1}^r (1 - x_i)^n.$$

2) a. Pour tout élément i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, notons S_i l'événement la première épreuve donne le résultat R_i . (S_1, S_2, \dots, S_r) est un système complet d'événements donc :

$x_1 + x_2 + \dots + x_r = P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_r) = P(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_r) = 1$. Alors :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1.$$

$E(X) = \sum_{i=1}^r (1 - x_i)^n = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - x_i)^n + (1 - x_r)^n$. Or $1 - x_r = x_1 + x_2 + \dots + x_{r-1}$ donc :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - x_i)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i \right)^n = f(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \text{ où } f \text{ est la fonction définie par :}$$

$$\forall (t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) \in (]0, 1[)^{r-1}, f(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - t_i)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^n.$$

b. f est une fonction polynômiale donc

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (]0, 1[)^{r-1}.$$

3) a. $\forall (t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) \in (]0, 1[)^{r-1}$, $f(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - t_i)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^n$ donc

$$\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, \forall (t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) \in (]0, 1[)^{r-1}, \frac{\partial f}{\partial t_k}(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) = -n(1 - t_k)^{n-1} + n \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^{n-1}.$$

b. Notons \mathcal{S} l'ensemble des points de $(]0, 1[)^{r-1}$ où les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément.

Soit $T = (t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$ un élément de $(]0, 1[)^{r-1}$.

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial t_k}(T) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, -n(1 - t_k)^{n-1} + n \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^{n-1} = 0.$$

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, (1-t_k)^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right)^{n-1}.$$

L'application $x \rightarrow x^{n-1}$ étant injective sur $[0, +\infty[$ il vient alors :

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, 1-t_k = \sum_{i=1}^{r-1} t_i.$$

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1-t_1 = \sum_{i=1}^{r-1} t_i \text{ et } 1-t_1 = 1-t_2 = \dots = 1-t_{r-1}.$$

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1-t_1 = \left(\sum_{i=1}^{r-1} t_i \right) \text{ et } t_1 = t_2 = \dots = t_{r-1}.$$

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1-t_1 = (r-1)t_1 \text{ et } t_1 = t_2 = \dots = t_{r-1}.$$

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{r} \text{ et } t_1 = t_2 = \dots = t_{r-1}.$$

$$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_{r-1} = \frac{1}{r}.$$

Observons que $\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r} \right)$ est bien élément de $(]0, 1])^{r-1}$. Ainsi :

$R = \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r} \right)$ est le seul point de $(]0, 1])^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément.

4) Soit $T = (t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$ un élément de $(]0, 1])^{r-1}$. Soient i et j deux éléments de $\llbracket 1, r-1 \rrbracket$.

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}(T) = -n(1-t_j)^{n-1} + n \left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k \right)^{n-1}.$$

- Supposons que i n'est pas égal à j : $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(T) = n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k \right)^{n-2}$.

En particulier $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(R) = n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{r} \right)^{n-2} = n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2}$.

- Supposons que i est égal à j : $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(T) = n(n-1)(1-t_i)^{n-2} + n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} t_k \right)^{n-2}$.

En particulier $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(R) = n(n-1) \left(1 - \frac{1}{r} \right)^{n-2} + n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{r} \right)^{n-2} = 2n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2}$.

$$M = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(R) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket^2} \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket^2, \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(R) = \begin{cases} n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2} & \text{si } i \neq j \\ 2n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Ou encore :

$$M = n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) a. J est une matrice symétrique et réelle donc

J est diagonalisable.

b. $J = (s_{i,j})$ avec $s_{i,j} = 1$ pour tout (i,j) appartenant à $\llbracket 1, r-1 \rrbracket^2$. Alors $J^2 = (r_{i,j})$ avec, pour tout (i,j) appartenant à $\llbracket 1, r-1 \rrbracket^2$:

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{r-1} s_{i,k} \times s_{k,j} = \sum_{k=1}^{r-1} 1 \times 1 = r-1 = (r-1) s_{i,j}.$$

$$J^2 = (r-1) J.$$

$J^2 - (r-1)J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$ donc $P = X^2 - (r-1)X$ est un polynôme annulateur de J dont les racines sont 0 et $r-1$.

Les valeurs propres de J étant nécessairement racines de P on peut affirmer que les seules valeurs propres possibles de J sont 0 et $r-1$.

Supposons que 0 ne soit pas valeur propre de J . Alors J est inversible. Comme $J^2 = (r-1)J$, en multipliant à droite par J^{-1} on obtient $J = (r-1)I$ ce qui n'est pas très raisonnable car $r-1$ est supérieur ou égal à 2. Ainsi 0 est valeur propre de J .

Raisonnons de la même manière pour $r-1$. Supposons que $r-1$ n'est pas une valeur propre de J .

$J - (r-1)I$ est alors inversible. Comme $J(J - (r-1)I) = J^2 - (r-1)J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$, il vient en multipliant à droite par $(J - (r-1)I)^{-1}$: $J = 0_{\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})}$. Ce qui est impossible.

Finalement 0 et $r-1$ sont des valeurs propres de J et ce sont les seules possibles.

Les valeurs propres de J sont 0 et $r-1$.

c. Toutes les colonnes de J sont identiques et non nulles, donc J est de rang 1. Ceci confirme que 0 est valeur propre de J et montre en plus que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0 est de dimension $r-2$ (penser au théorème du rang appliqué à un endomorphisme de matrice $J...$). Le sous-espace propre de J associé à $r-1$ est alors de dimension 1 puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de J est $r-1$.

Le sous-espace propre de J associé à la valeur propre $r-1$ est de dimension 1.

d. J est symétrique et réelle. J admet exactement deux valeurs propres 0 et $r-1$. Les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont de dimensions respectives $r-2$ et 1.

Ainsi il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \dots, U_{r-1})$ de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, ..., 0 et $r-1$.

$$\forall k \in \llbracket 1, r-2 \rrbracket, AU_k = IU_k + JU_k = U_k \text{ et } AU_{r-1} = IU_{r-1} + JU_{r-1} = U_{r-1} + (r-1)U_{r-1} = rU_{r-1}.$$

Alors $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, \dots, U_{r-1})$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, 1, ..., 1 et r .

Soit P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ à la base \mathcal{B}' .

- $P^{-1} = {}^tP$ car \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$.

$$\bullet {}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r \end{pmatrix} \text{ car } \mathcal{B}' = (U_1, U_2, \dots, U_{r-1}) \text{ est une base (orthonor-}$$

male) de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, 1, ..., 1 et r

Ainsi

A est diagonalisable et il existe une matrice P , de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ d'inverse tP telle que $A = PD{}^tP$ où D est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont les $(r-2)$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1 et le dernier égal à r .

6) a. Soit H un élément non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$. Pour montrer que tHMH est strictement positif il suffit de prouver que tHAH est strictement positif car $M = n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}A$ et $n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}$ est strictement positif.

$$\text{Posons } H' = {}^tPH = P^{-1}H = \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_{r-1} \end{pmatrix}.$$

$${}^tHAH = {}^tHPD{}^tPH = {}^t({}^tPH)D{}^tPH = {}^tH'DH' = (h'_1, h'_2, \dots, h'_{r-1}) \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_{r-2} \\ rh'_{r-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{r-2} h_k'^2 + rh_{r-1}'^2.$$

$${}^tHAH = \sum_{k=1}^{r-1} h_k'^2 + (r-1)h_{r-1}'^2 = \|H'\|^2 + (r-1)h_{r-1}'^2.$$

Si $H' = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ alors $P^{-1}H = {}^tPH = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ et donc $H = 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})}$ car P^{-1} est inversible.

Ainsi H' n'est pas nul. Alors $\|H'\|^2 > 0$ et $(r-1)h_{r-1}'^2 \geq 0$ donc ${}^tHAH > 0$. Ceci achève de montrer que ${}^tHMH > 0$.

Si H est un élément non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ alors : ${}^t H M H > 0$.

Remarque

Il convient sans doute de remarquer que la démonstration de ce résultat ne nécessitait pas une diagonalisation.

En effet soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$.

$${}^t H A H = {}^t H I H + {}^t H J H = {}^t H H + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} h_i s_{i,j} h_j = \|H\|^2 + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} h_i h_j = \|H\|^2 + \sum_{i=1}^{r-1} h_i \sum_{j=1}^{r-1} h_j.$$

$${}^t H A H = \|H\|^2 + \left(\sum_{i=1}^{r-1} h_i \right)^2. \text{ Ainsi } {}^t H A H > 0 \text{ car } \|H\|^2 > 0. \text{ Donc } {}^t H M H > 0.$$

b. Une utilisation simple du produit matriciel donne :

$$\forall H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t H M H = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(R) h_i h_j.$$

c. $M = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(R) \right)$ et $\forall H \in \mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R}), H \neq 0_{\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^t H M H > 0$. Le cours indique alors que :

f présente un minimum local au point R .

$$\text{d. } f(R) = \sum_{i=1}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{r} \right)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r} \right)^n = r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n.$$

La valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum est $r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n$.

Remarque

Un léger doute nous envahit. Le (vrai) problème a-t-il vraiment été traité ?

Quel problème ? Sans doute trouver le minimum de $E(X) = \sum_{k=1}^r (1 - x_k)^n$ sous les contraintes $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \dots, x_r > 0$ et $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1$.

Ce qui précède nous a permis de montrer que si ce minimum existe et qu'il est atteint en (u_1, u_2, \dots, u_r) alors il vaut $r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n$ et $u_1 = u_2 = \dots = u_{r-1} = \frac{1}{r}$ et donc $u_r = \frac{1}{r}$.

Est-ce de la suffisance de ne pas se suffire du nécessaire ? Pas nécessairement ! Alors achevons de résoudre le problème.

Posons $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u_k = \frac{1}{r} \cdot (u_1, u_2, \dots, u_r)$ est un élément de $]0, 1]^r$ vérifiant : $u_1 + u_2 + \dots + u_r = 1$ et

$$\sum_{k=1}^r (1 - u_k)^n = r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n.$$

Soit (x_1, x_2, \dots, x_r) un élément de $]0, 1]^r$ vérifiant : $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1$.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^r (1 - x_k)^n \geq r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n$.

$\varphi : t \rightarrow t^n$ est convexe sur $]0, 1[$ car φ'' est positive sur $]0, 1[$.

Ainsi si (y_1, y_2, \dots, y_r) est une famille d'éléments de $]0, 1[$ et si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ est une famille de réels positifs dont la somme est 1 on a :

$$\left(\sum_{k=1}^r \alpha_k y_k \right)^n \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k (y_k)^n$$

En appliquant ce résultat avec $y_k = 1 - x_k$ et $\alpha_k = \frac{1}{r}$ (pour tout k dans $\llbracket 1, r \rrbracket$) il vient :

$$\left(\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (1 - x_k) \right)^n \leq \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (1 - x_k)^n.$$

Or $\left(\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (1 - x_k) \right)^n = \left(\frac{1}{r} (r-1) \right)^n = \left(\frac{r-1}{r} \right)^n$ car $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1$.

Alors $\left(\frac{r-1}{r} \right)^n \leq \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (1 - x_k)^n$. Ce qui donne $\sum_{k=1}^r (1 - x_k)^n \geq r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n$.

On peut maintenant dire que $E(X)$ est minimum si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$.
