
EXERCICE 1

1) a. Posons : $\forall t \in]0, 1]$, $h(t) = 1 - \ln t$. h est continue sur $]0, 1]$.

Soit ε un élément de $]0, 1]$. Une intégration par parties simple donne (avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = 1 - \ln t \dots$) :

$$\int_{\varepsilon}^1 (1 - \ln t) dt = [t(1 - \ln t)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 t \left(-\frac{1}{t}\right) dt = 1 - \varepsilon(1 - \ln \varepsilon) + \int_{\varepsilon}^1 1 dt = 1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon + 1 - \varepsilon = 2 - 2\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon.$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0$ donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 (1 - \ln t) dt = 2$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1 - \ln t) dt \text{ existe et vaut } 2}.$$

b. Posons $\forall t \in]0, +\infty[$, $\ell(t) = \frac{1 - \ln t}{2 + t^2}$. ℓ est continue sur $]0, +\infty[$.

Soit t un élément de $]0, 1]$. $2 \leq 2 + t^2$ donc $0 \leq \frac{1}{2 + t^2} \leq \frac{1}{2}$.

Comme $1 - \ln t$ est positif il vient : $0 \leq \ell(t) \leq \frac{1}{2}(1 - \ln t)$. (*)

$\forall t \in]0, 1]$, $\boxed{0 \leq \ell(t) \leq \frac{1}{2}(1 - \ln t)}$ et $\int_0^1 (1 - \ln t) dt$ existe donc $\int_0^1 \ell(t) dt$ existe également.

De plus $\int_1^x (1 - \ln t) dt$ existe, pour tout réel x strictement positif car ℓ est continue sur $]0, +\infty[$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^x \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} dt \text{ converge pour tout réel } x \text{ strictement positif}}.$$

Remarque En intégrant l'inégalité (*) on obtient : $0 \leq \int_0^1 \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \ln t) dt = 1$. Nous en reparlerons...

c. $\int_0^1 \ell(t) dt$ converge donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \ell(t) dt = \int_0^1 \ell(t) dt$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_0^1 \ell(t) dt - \int_x^1 \ell(t) dt \right) = 0$.

Ceci donne encore, grâce à Chasles, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \ell(t) dt = 0$. Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 = F(0)$.

$$\boxed{F \text{ est continue en } 0}.$$

d. ℓ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit L la primitive de ℓ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = \int_0^x \ell(t) dt = \int_0^1 \ell(t) dt + \int_1^x \ell(t) dt = F(1) + L(x) - L(1) = F(1) + L(x).$$

L est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée ℓ est continue sur cet intervalle. Ainsi L est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Comme $x \rightarrow F(1)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, car c'est une fonction constante, on peut alors dire que :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = F(1) + L(x) \text{ donc } \forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = L'(x) = \ell(x) = \frac{1 - \ln x}{2 + x^2}.$$

Le signe de F' sur $]0, +\infty[$ est celui de la fonction $x \rightarrow 1 - \ln x$.

Alors F est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0, e[$ et strictement négative sur $]e, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } [0, e] \text{ et strictement décroissante sur } [e, +\infty[.}$$

2) a. Commençons par montrer que $[0, 1]$ est stable par F .

Comme F est croissante sur $[0, 1]$, $F([0, 1]) \subset [F(0), F(1)] = [0, F(1)]$.

$$\text{Or, comme nous l'avons remarqué plus haut, } F(1) = \int_0^1 \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \ln t) dt = 1.$$

Alors $F([0, 1]) \subset [0, F(1)] \subset [0, 1]$. Ainsi $[0, 1]$ est stable par F .

Pour plus de précautions, montrons par récurrence que, pour tout élément n de \mathbb{N} , u_n est défini et appartient à $[0, 1]$.

- u_0 valant 1, la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N} et montrons la pour $n + 1$.

u_n est un élément de $[0, 1]$ alors $u_{n+1} = F(u_n)$ est défini et appartient à $F([0, 1])$. Comme $F([0, 1]) \subset [0, 1]$, u_{n+1} appartient à $[0, 1]$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, u_n \text{ est défini et appartient à } [0, 1].}$$

b. u_1 appartient à $[0, 1]$ et $u_0 = 1$ donc $\boxed{u_0 \geq u_1}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \geq u_1$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N} et montrons la pour $n + 1$.

$u_n \geq u_{n+1}$. Mieux $1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq 0$ et F est croissante sur $[0, 1]$, donc $u_{n+1} = F(u_n) \geq F(u_{n+1}) = u_{n+2}$. $u_{n+1} \geq u_{n+2}$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}. (u_n)_{n \geq 0} \text{ est décroissante.}}$$

c. $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc :

$(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

3) a. g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

$$\forall x \in]0, 1[, g'(x) = F'(x) - 1 = \frac{1 - \ln x}{2 + x^2} - 1 = \frac{-1 - \ln x - x^2}{2 + x^2}.$$

Posons : $\forall x \in]0, 1[, \varphi(x) = -1 - \ln x - x^2$. φ est dérivable sur $]0, 1[$ et $\forall x \in]0, 1[, \varphi'(x) = -\frac{1}{x} - 2x$.

φ' est strictement négative sur $]0, 1[$ donc φ est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

Notons que $\varphi(1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$.

φ est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1[$. φ définit une bijection de $]0, 1[$ sur l'intervalle $[-2, +\infty[$. Comme 0 appartient à $[-2, +\infty[$, il existe un unique élément β appartenant à $]0, 1[$ (et même à $]0, 1[$) tel que $\varphi(\beta) = 0$.

Rappelons que $\forall x \in]0, 1[, g'(x) = \frac{\varphi(x)}{2 + x^2}$. Alors :

Il existe un unique réel β de $]0, 1[$ tel que $g'(\beta) = 0$.

φ est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et nulle en β .

Alors φ est strictement positive (resp. négative) sur $]0, \beta[$ (resp. $]\beta, 1[$).

De plus g' est du signe de φ sur $]0, 1[$ et g est continue sur $[0, 1]$. Par conséquent :

g est strictement croissante sur $[0, \beta]$ et strictement décroissante sur $[\beta, 1]$.

b. g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\beta, 1[$ donc g définit une bijection de $]\beta, 1[$ sur l'intervalle $[g(1), \lim_{x \rightarrow \beta^+} g(x)[= [g(1), g(\beta)[$.

$g(1) = F(1) - 1 \leq 0$. De plus g est strictement croissante sur $[0, \beta]$ et $g(0) = F(0) - 0 = 0$ donc $g(\beta) > 0$.

Ainsi 0 est élément de l'intervalle $[g(1), g(\beta)[$. Alors :

Il existe un unique élément α de $]\beta, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

4) a. Montrons par récurrence que pour tout élément n de \mathbb{N} , $u_n \geq \alpha$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1 \geq \alpha$.
- Supposons que pour un élément n de \mathbb{N} on ait $u_n \geq \alpha$.

Alors $1 \geq u_n \geq \alpha \geq 0$. Comme F est croissante sur $[0, 1]$ on a : $u_{n+1} = F(u_n) \geq F(\alpha) = \alpha$ (en effet $F(\alpha) - \alpha = g(\alpha) = 0$). La propriété est vraie pour $n + 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \alpha}$$

b. Notons γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \geq u_n \geq \alpha$, γ est alors élément de $[\alpha, 1]$ donc de $] \beta, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(u_n)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$ et F est continue en γ donc $F(\gamma) = \gamma$ ou $g(\gamma) = 0$.

γ est donc un élément de $] \beta, 1]$ tel que $g(\gamma) = 0$; d'après 3) b $\gamma = \alpha$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}$$

EXERCICE 2

1) Soit ω un élément de Ω .

• Supposons que $U(\omega) = 1$. Alors $X(\omega) \leq n$ et $Y_n(\omega) = xX(\omega) - y(n - X(\omega))$ (il a vendu $X(\omega)$ unité(s) du produit et il lui en reste $n - X(\omega)$).

Par conséquent : $Y_n(\omega) = xX(\omega) - y(n - X(\omega)) = (xX(\omega) - y(n - X(\omega))) \times 1 + nx(1 - 1)$.

$$Y_n(\omega) = (xX(\omega) - y(n - X(\omega)))U(\omega) + nx(1 - U(\omega)).$$

• Supposons que $U(\omega) = 0$. Alors $X(\omega) > n$ et $Y_n(\omega) = nx$ (il a vendu les n unités). Par conséquent :

$$Y_n(\omega) = nx = (xX(\omega) - y(n - X(\omega))) \times 0 + nx(1 - 0) = (xX(\omega) - y(n - X(\omega)))U(\omega) + nx(1 - U(\omega)).$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $Y_n(\omega) = (xX(\omega) - y(n - X(\omega)))U(\omega) + nx(1 - U(\omega))$.

$$\boxed{Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U)}.$$

2) a. Soit ω un élément de Ω .

• Supposons que $X(\omega) \leq n$. Alors $X(\omega) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $U(\omega) = 1$ donc $(XU)(\omega) \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

• Supposons que $X(\omega) > n$. Alors $U(\omega) = 0$ donc $(XU)(\omega) = 0$; $(XU)(\omega) \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$\boxed{\text{La variable aléatoire } XU \text{ prend ses valeurs dans } \llbracket 0, n \rrbracket.}$

b. $E(XU) = \sum_{k=0}^n k P(XU = k) = \sum_{k=1}^n k P(XU = k)$.

Or pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\{XU = k\} = \{X = k\}$. Alors :

$$\boxed{E(XU) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k P(X = k)}$$

c. $Y_n = (x + y)XU - n(x + y)U + nx$.

La linéarité de l'espérance donne alors : $E(Y_n) = (x + y)E(XU) - n(x + y)E(U) + nx$.

$$E(U) = P(U = 1) = P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X = k).$$

Ainsi $E(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^n k P(X = k) - n(x + y) \sum_{k=0}^n P(X = k) + nx$. Une petite factorisation fournit alors :

$$E(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^n (k - n) P(X = k) + nx.$$

$$\mathbf{3) a.} \quad E(Y_{n+1}) = (x + y) \sum_{k=0}^{n+1 \text{ ou } n} (k - n - 1) P(X = k) + (n + 1)x$$

$$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = (x + y) \sum_{k=0}^n (k - n - 1) P(X = k) + (n + 1)x - (x + y) \sum_{k=0}^n (k - n) P(X = k) - nx.$$

$$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = -(x + y) \sum_{k=0}^n P(X = k) + x. \text{ Finalement :}$$

$$E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = x - (x + y) \sum_{k=0}^n P(X = k).$$

b. $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) \geq 0$. La suite $\left(\sum_{k=0}^n P(X = k) \right)_{n \geq 0}$ est donc croissante et converge vers 1 (X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans \mathbb{N} donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$).

De plus x et y sont deux réels strictement positifs donc $\frac{x}{x + y} < 1$.

Il existe donc un élément r de \mathbb{N} tel que : $\forall n \in \llbracket r, +\infty \llbracket, \sum_{k=0}^n P(X = k) \geq \frac{x}{x + y}$. Notons que r appartient à \mathbb{N}^* car, par hypothèse, $P(X = 0) < \frac{x}{x + y}$.

Considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=0}^n P(X = k) < \frac{x}{x + y}\}$.

0 est élément de A (toujours l'hypothèse $P(X = 0) < \frac{x}{x + y}$) et, d'après ce qui précède, A est contenu dans $\llbracket 0, r - 1 \rrbracket$.

A est alors une partie non vide et majorée de \mathbb{N} , donc A possède un plus grand élément n_0 .

n_0 appartient à A et $n_0 + 1$ n'appartient pas à A donc : $\sum_{k=0}^{n_0} P(X = k) < \frac{x}{x + y}$ et $\sum_{k=0}^{n_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x + y}$.

Supposons qu'il existe un second élément m_0 de \mathbb{N} tel que $\sum_{k=0}^{m_0} P(X = k) < \frac{x}{x + y}$ et $\sum_{k=0}^{m_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x + y}$.

Alors m_0 est un élément de A et $\forall n \in \llbracket m_0 + 1, +\infty \llbracket, \sum_{k=0}^n P(X = k) \geq \sum_{k=0}^{m_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x + y}$.

Donc m_0 est un élément de A et tout élément de \mathbb{N} strictement supérieur à m_0 n'est pas dans A ; m_0 est le plus grand élément de A . Alors $m_0 = n_0$. Dès lors :

$$\text{Il existe un unique entier naturel } n_0 \text{ tel que : } \sum_{k=0}^{n_0} P(X = k) < \frac{x}{x + y} \text{ et } \sum_{k=0}^{n_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x + y}.$$

$$\text{c. } \forall n \in \mathbb{N}, E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = x - (x+y) \sum_{k=0}^n P(X=k) = (x+y) \left(\frac{x}{x+y} - \sum_{k=0}^n P(X=k) \right).$$

Alors $\forall n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket, E(Y_{n+1}) - E(Y_n) > 0$ et $\forall n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket, E(Y_{n+1}) - E(Y_n) \leq 0$.

Ainsi $\forall n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket, E(Y_{n_0+1}) > E(Y_n)$ et $\forall n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket, E(Y_{n_0+1}) \geq E(Y_n)$.

$E(Y_{n_0+1})$ est donc le maximum de l'ensemble $\{E(Y_n); n \in \mathbb{N}\}$.

Ce commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain, en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.

$$4) \text{ a. Soit } k \text{ un élément de } \mathbb{N}. P(X = k + 1) = \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} e^{-a} = \frac{a}{k+1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{a}{k+1} P(X = k).$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k + 1) = \frac{a}{k+1} P(X = k).$$

b. Observons que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{a}{k} P(X = k - 1)$.

Notons aussi que l'hypothèse que $P(X = 0) < \frac{x}{x+y}$ n'est pas nécessairement vérifiée ($P(X = 0) = e^{-a}$).

```

1
2 Program EDHEC_2000S;
3
4 var k:integer;a,u,s,x,y,z:real;
5
6 begin
7 write('Donner a. a='); readln(a);
8 write('Donner x. x='); readln(x);
9 write('Donner y. y='); readln(y);
10
11 k:=0;
12 u:=exp(-a);s:=u;
13 z:=x/(x+y);
14
15 while (s<z) do
16     begin
17         k:=k+1;u:=a/k*u;s:=s+u;
18     end;
19
20 if k=0 then writeln('La condition initiale n'est pas remplie.')
21     else
22 writeln('La taille du stock qui maximise l''espérance de gain est : ',k);
23 end.
```

EXERCICE 3

1) $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de X_1 (resp. X_2) strictement positive et dérivable sur \mathbb{R} .

Mieux c'est l'unique densité strictement positive et dérivable sur \mathbb{R} de X_1 (resp. X_2).

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ainsi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x^2 + y^2) = f_1(x) f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Soit x un élément de \mathbb{R}^+ . Posons $t = \sqrt{\frac{x}{2}}$. $x = t^2 + t^2$ donc $g(x) = g(t^2 + t^2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2+t^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x}{2}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x}{2}}.$$

2) a. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x) f_2(y) = g(x^2 + y^2)$.

En dérivant par rapport à x on obtient : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_1'(x) f_2(y) = 2x g'(x^2 + y^2)$.

Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{2x g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)} = \frac{f_1'(x) f_2(y)}{f_1(x) f_2(y)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, \frac{f_1'(x)}{x f_1(x)} = \frac{2 g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}.$$

b. Soient x_1 et x_2 deux réels (distincts) non nuls.

$$h(x_1) = \frac{f_1'(x_1)}{x_1 f_1(x_1)} = \frac{2 g'(x_1^2 + x_2^2)}{g(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{2 g'(x_2^2 + x_1^2)}{g(x_2^2 + x_1^2)} = \frac{f_1'(x_2)}{x_2 f_1(x_2)} = h(x_2).$$

$$\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^*)^2, h(x_1) = h(x_2). \text{ } h \text{ est constante sur } \mathbb{R}^*.$$

c. f_1 et $x \rightarrow e^{-\frac{ax^2}{2}}$ sont dérivables sur \mathbb{R} donc, par produit, k est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, k'(x) = f_1'(x) e^{-\frac{ax^2}{2}} - ax f_1(x) e^{-\frac{ax^2}{2}} = (f_1'(x) - ax f_1(x)) e^{-\frac{ax^2}{2}}.$$

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = \frac{f_1'(x)}{x f_1(x)} = a$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_1'(x) = ax f_1(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_1'(x) - ax f_1(x) = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, k'(x) = 0$.

Ainsi k' est nulle sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. k est constante sur chacun de ces intervalles.

$$k \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*.$$

Il existe alors deux réels K et K' tels que : $\forall x \in] -\infty, 0[, k(x) = K$ et $\forall x \in]0, +\infty[, k(x) = K'$.

Par définition, k est continue sur \mathbb{R} donc en 0. Alors $K = \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = k(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = K'$.

Donc $K = k(0) = K'$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = K$.

k est constante sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) e^{-\frac{ax^2}{2}} = k(x) = K$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = K e^{\frac{ax^2}{2}}$.

Il existe un réel K tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = K e^{\frac{ax^2}{2}}$.

d. f_1 est une densité de probabilité strictement positive sur \mathbb{R} donc K est strictement positif.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}} dt$ converge puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) dt$ converge. En particulier $\int_1^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}} dt$ converge.

Supposons que a est positif ou nul. $\forall t \in [1, +\infty[$, $e^{\frac{at^2}{2}} \geq 1 = \frac{1}{t^0} \geq 0$.

La convergence de $\int_1^{+\infty} e^{\frac{at^2}{2}} dt$ donne alors la convergence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^0} dt$ ce que réproue la morale Riemannienne.

a est strictement négatif.

e. $\sigma_1 = \sqrt{\frac{-1}{a}}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = K e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$. De plus f_1 est une densité de probabilité.

Alors $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) dt = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}} dt = K \sqrt{2\pi} \sigma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}} dt$.

Or $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres 0 et σ_1 .

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}} dt = 1$. Il vient alors $1 = K \sqrt{2\pi} \sigma_1 \times 1 = K \sqrt{2\pi} \sigma_1$.

Par conséquent $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$.

X_1 suit une loi normale de paramètres 0 et σ_1 .

3) De même on peut trouver un réel σ_2 strictement positif tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}$ et ainsi X_2 suit une loi normale de paramètres 0 et σ_2 .

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x) f_2(y) = g(x^2 + y^2)$. Ainsi $f_1(1) f_2(0) = g(1) = f_1(0) f_2(1)$.

Alors $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}}$.

Ce qui donne $e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}} = e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}}$, puis $\frac{1}{2\sigma_1^2} = \frac{1}{2\sigma_2^2}$.

Enfin $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$ car ces deux réels sont strictement positifs.

X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi normale.

PROBLÈME

Partie 1 : étude des symétries de \mathbb{R}^n

1) a. Soit x un élément de F_1 . $x = x + 0_{\mathbb{R}^n}$ avec x dans F_1 et $0_{\mathbb{R}^n}$ dans F_2 Alors $s(x) = x - 0_{\mathbb{R}^n} = x$.

$$\forall x \in F_1, s(x) = x$$

b. Ce qui précède montre que $F_1 \subset \text{Ker}(s - Id)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit x un élément de $\text{Ker}(s - Id)$.

$\exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2. s(x) = x$ donc $x_1 - x_2 = x_1 + x_2$. Alors $2x_2 = 0_{\mathbb{R}^n}$. $x_2 = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Par conséquent $x = x_1$ et x est un élément de F_1 .

Ceci achève de prouver que $\text{Ker}(s - Id) \subset F_1$. Finalement :

$$\text{Ker}(s - Id) = F_1$$

2) a. Soit x un élément de F_2 . $x = 0_{\mathbb{R}^n} + x$ avec $0_{\mathbb{R}^n}$ dans F_1 et x dans F_2 Alors $s(x) = 0_{\mathbb{R}^n} - x = -x$.

$$\forall x \in F_2, s(x) = -x$$

b. Ce qui précède montre que $F_2 \subset \text{Ker}(s + Id)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit x un élément de $\text{Ker}(s + Id)$.

$\exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2. s(x) = -x$ donc $x_1 - x_2 = -x_1 - x_2$. Alors $2x_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$. $x_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Par conséquent $x = x_2$ et x est un élément de F_2 .

Ceci achève de prouver que $\text{Ker}(s + Id) \subset F_2$. Finalement :

$$\text{Ker}(s + Id) = F_2$$

3) Soit p la dimension de F_1 . F_2 est de dimension $n - p$.

Rappelons que F_1 et F_2 ne sont pas réduits au vecteur nul.

Soit (e'_1, \dots, e'_p) une base de F_1 et soit (e'_{p+1}, \dots, e'_n) une base de F_2 .

Comme F_1 et F_2 sont supplémentaires, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$ est une base de \mathbb{R}^n .

Mieux \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de s car les éléments de \mathcal{B}' ne sont pas nuls,

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, s(e'_i) = e'_i$ et $\forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, s(e'_i) = -e'_i$.

s est diagonalisable et a pour matrice dans $\mathcal{B}' : \begin{pmatrix} I_p & O_{p, n-p} \\ O_{n-p, p} & -I_{n-p} \end{pmatrix}$

Remarque

I_p (resp. I_{n-p}) est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$).

$O_{n-p, p}$ (resp. $O_{p, n-p}$) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p, p}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R})$).

4) Réciproquement soit p un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} I_p & O_{p, n-p} \\ O_{n-p, p} & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que A est la matrice d'une symétrie.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n .

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_i) = e_i, \forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, f(e_i) = -e_i$.

Posons $F_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $F_2 = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

(e_1, \dots, e_p) et (e_{p+1}, \dots, e_n) sont deux familles libres de \mathbb{R}^n comme sous-familles d'une famille libre de \mathbb{R}^n .

(e_1, \dots, e_p) (resp. (e_{p+1}, \dots, e_n)) est alors une base de F_1 (resp. F_2).

Comme $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{R}^n , F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Notons également que F_1 et F_2 ne sont pas réduits au seul vecteur nul.

Considérons alors la symétrie vectorielle s par rapport à F_1 et parallèlement à F_2 .

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, s(e_i) = e_i = f(e_i)$ et $\forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, s(e_i) = -e_i = f(e_i)$.

s et f sont alors deux endomorphismes de \mathbb{R}^n qui coïncident sur la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n .

Par conséquent $f = s$. f est donc une symétrie.

Si p est un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la matrice $\begin{pmatrix} I_p & O_{p, n-p} \\ O_{n-p, p} & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'une symétrie.

Partie 2 : étude de deux exemples.

1) a. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ un élément de \mathbb{R}^3 et soit λ un réel.

$$s(u) = \lambda u \iff \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -(1+3\lambda)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (2-3\lambda)y - z = 0 \\ 2x - y + (2-3\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ effectuées sur le système permettent de dire que :

$$s(u) = \lambda u \iff \begin{cases} 3(1-\lambda)(x+2y) = 0 \\ 2x + (2-3\lambda)y - z = 0 \\ 3(\lambda-1)(y-z) = 0 \end{cases}$$

• 1^{er} cas : $\lambda = 1$. $s(u) = u \iff 2x - y - z = 0$.

1 est valeur propre de s et le sous-espace propre associé est le plan vectoriel d'équation $2x - y - z = 0$ dans la base \mathcal{B} . Notons que $(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3)$ est une base de ce plan.

• 2^{ème} cas : $\lambda \neq 1$.

$$s(u) = \lambda u \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + (2-3\lambda)y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = y \\ -4y + (2-3\lambda)y - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = y \\ -3(\lambda+1)y = 0 \end{cases}$$

- $\lambda = -1$. $s(u) = -u \iff x = -2y$ et $z = y$.

-1 est valeur propre de u et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(-2e_1 + e_2 + e_3)$

- $\lambda \neq -1$. $s(u) = \lambda u \iff x = y = z = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^3}$. λ n'est pas valeur propre.

s possède deux valeurs propres 1 et -1 .

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est le plan vectoriel de base $(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par $(-2e_1 + e_2 + e_3)$.

b. La somme des dimensions des deux sous-espaces propres de s est égale à la dimension de \mathbb{R}^3 donc s est diagonalisable.

Ainsi les deux sous-espaces propres $\text{Ker}(s - Id)$ et $\text{Ker}(s + Id)$ de s sont supplémentaires et non réduits au seul vecteur nul.

Soit x un élément de \mathbb{R}^3 . $\exists!(x_1, x_2) \in \text{Ker}(s - Id) \times \text{Ker}(s + Id)$, $x = x_1 + x_2$.

$s(x_1) = x_1$ et $s(x_2) = -x_2$ donc $s(x) = x_1 - x_2$.

s est donc la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + Id)$.

s est la symétrie par rapport au plan vectoriel de base $(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3)$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(-2e_1 + e_2 + e_3)$.

2) a. Soit x un élément de E .

$$s(x + s(x)) = s(x) + s(s(x)) = s(x) + x = x + s(x); x + s(x) \in \text{Ker}(s - Id).$$

$$s(x - s(x)) = s(x) - s(s(x)) = s(x) - x = -(x - s(x)); x - s(x) \in \text{Ker}(s + Id).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, x + s(x) \in \text{Ker}(s - Id) \text{ et } x - s(x) \in \text{Ker}(s + Id).}$$

b. • Soit x un élément de \mathbb{R}^n . Posons : $x_1 = \frac{1}{2}(x + s(x))$ et $x_2 = \frac{1}{2}(x - s(x))$. $x = x_1 + x_2$.

$x + s(x) \in \text{Ker}(s - Id)$ et $x - s(x) \in \text{Ker}(s + Id)$. Par conséquent : $x_1 \in \text{Ker}(s - Id)$ et $x_2 \in \text{Ker}(s + Id)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists (x_1, x_2) \in \text{Ker}(s - Id) \times \text{Ker}(s + Id), x = x_1 + x_2$. Alors $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(s - Id) + \text{Ker}(s + Id)$.

• Soit x un élément de $\text{Ker}(s - Id) \cap \text{Ker}(s + Id)$. $s(x) = x$ et $s(x) = -x$. $x = -x$ et x est alors nul.

$\text{Ker}(s - Id) \cap \text{Ker}(s + Id) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\text{Ker}(s - Id) \text{ et } \text{Ker}(s + Id) \text{ sont supplémentaires.}}$$

c. Soit x un élément de \mathbb{R}^n . $\exists (x_1, x_2) \in \text{Ker}(s - Id) \times \text{Ker}(s + Id), x = x_1 + x_2$.

Alors $s(x_1) = x_1$ et $s(x_2) = -x_2$. Ce qui donne $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$.

$$\boxed{s \text{ est la symétrie vectorielle par rapport à } \text{Ker}(s - Id) \text{ parallèlement à } \text{Ker}(s + Id).}$$

au moins si $\text{Ker}(s - Id)$ et $\text{Ker}(s + Id)$ ne sont pas réduits à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$... pour être conforme au texte.

Partie 3

1) Nous avons vu plus haut que s est la symétrie vectorielle par rapport au sous-espace propre associé à la valeur propre 1 parallèlement au sous-espace propre associé à la valeur propre -1 .

La matrice M de s dans la base canonique, qui est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 , est symétrique. s est donc un endomorphisme symétrique. Ainsi ces deux sous-espaces propres sont orthogonaux. Etant déjà supplémentaires l'un est l'orthogonal de l'autre. s est donc une symétrie orthogonale.

$$\boxed{M \text{ est la matrice d'une symétrie orthogonale.}}$$

2) **a.** Soit x un élément de $\text{Ker}(s - Id)$ et soit y un élément de $\text{Ker}(s + Id)$. $s(x) = x$ et $s(y) = -y$.

$$\langle x, y \rangle = \langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle. \text{ Alors } 2\langle x, y \rangle = 0 \text{ et } \langle x, y \rangle = 0.$$

$$\forall (x, y) \in \text{Ker}(s - Id) \times \text{Ker}(s + Id), \langle x, y \rangle = 0.$$

$$\boxed{\text{Ker}(s - Id) \text{ et } \text{Ker}(s + Id) \text{ sont orthogonaux.}}$$

s est une symétrie donc $\text{Ker}(s - Id)$ et $\text{Ker}(s + Id)$ sont supplémentaires. Ces deux sous-espaces sont donc supplémentaires et orthogonaux. Par conséquent l'un est l'orthogonal de l'autre.

s est donc une symétrie orthogonale.

b. Soient x et y deux éléments de \mathbb{R}^n . $\exists!(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$, $x = x_1 + x_2$ et $\exists!(y_1, y_2) \in F \times F^\perp$, $y = y_1 + y_2$.

$$\langle s(x), y \rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_2, y_2 \rangle.$$

$$\langle s(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x_2, y_2 \rangle \text{ car } x_1 \text{ (resp. } x_2) \text{ et } y_2 \text{ (resp. } y_1) \text{ sont orthogonaux.}$$

$$\text{De même } \langle s(y), x \rangle = \langle y_1, x_1 \rangle - \langle y_2, x_2 \rangle.$$

$$\langle s(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x_2, y_2 \rangle = \langle y_1, x_1 \rangle - \langle y_2, x_2 \rangle = \langle s(y), x \rangle = \langle x, s(y) \rangle.$$

s est un endomorphisme symétrique.

Si s est une symétrie de \mathbb{R}^n , s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.

3) a. Soit x un élément de \mathbb{R}^n . $\exists!(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$, $x = x_1 + x_2$.

$$s(x) = x_1 - x_2 = x_1 - (x - x_1) = 2x_1 - x = 2p(x) - x = (2p - Id)(x).$$

$$s = 2p - Id$$

b. Soit x un élément de \mathbb{R}^n . $p(x)$ est un élément de F . Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ la famille des coordonnées de $p(x)$ dans la base (u_1, u_2, \dots, u_p) .

$x - p(x)$ est un élément de F^\perp . Donc $x - p(x)$ est orthogonal à tous les éléments de la famille (u_1, u_2, \dots, u_p) .

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, 0 = \langle x - p(x), u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \langle p(x), u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k, u_i \right\rangle.$$

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, 0 = \langle x, u_i \rangle - \sum_{k=1}^p \alpha_k \langle u_k, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \alpha_i$ car (u_1, u_2, \dots, u_p) est une famille orthonormale.

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = \langle x, u_i \rangle. \text{ Alors } p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i \text{ et } s(x) = 2 \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i - x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, s(x) = 2 \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i - x.$$

4) a. Notons que F est un plan vectoriel et que $v_1 = 2e_1 + e_2$ est un élément de F .

Cherchons un élément non nul de F orthogonal à v_1 . Soit $\omega = x e_1 + y e_2 + z e_3$ de \mathbb{R}^3 .

ω est un élément de F orthogonal à v_1 si et seulement si $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad (*)$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 4x + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -\frac{5}{3}x \end{cases}.$$

Ainsi $v_2 = 3e_1 - 6e_2 - 5e_3$ est un vecteur de F orthogonal à v_1 .

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ et } \|v_2\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{70}.$$

Posons $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(3e_1 - 6e_2 - 5e_3)$.

Alors (u_1, u_2) est une famille orthonormale, donc libre, de deux vecteurs du plan vectoriel F . C'est donc une base orthonormale de F .

$$(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{70}}(3e_1 - 6e_2 - 5e_3) \right) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

b. Nous noterons encore s la symétrie orthogonale par rapport à F .

Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ un élément de \mathbb{R}^3 .

(u_1, u_2) est une base orthonormale de F , donc $s(u) = 2 \langle u, u_1 \rangle u_1 + 2 \langle u, u_2 \rangle u_2 - u$.

$$s(u) = 2 \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2) + 2 \frac{1}{\sqrt{70}}(3x - 6y - 5z) \frac{1}{\sqrt{70}}(3e_1 - 6e_2 - 5e_3) - x e_1 - y e_2 - z e_3.$$

$$s(u) = \frac{1}{35} \left(14(2x + y)(2e_1 + e_2) + (3x - 6y - 5z)(3e_1 - 6e_2 - 5e_3) - 35x e_1 - 35y e_2 - 35z e_3 \right)$$

$$s(u) = \frac{1}{35} \left[(28(2x + y) + 3(3x - 6y - 5z) - 35x) e_1 + (14(2x + y) - 6(3x - 6y - 5z) - 35y) e_2 + (-5(3x - 6y - 5z) - 35z) e_3 \right].$$

$$s(u) = \frac{1}{35} \left[(30x + 10y - 15z) e_1 + (10x + 15y + 30z) e_2 + (-15x + 30y - 10z) e_3 \right].$$

$$s(u) = \frac{1}{7} \left[(6x + 2y - 3z) e_1 + (2x + 3y + 6z) e_2 + (-3x + 6y - 2z) e_3 \right]. \text{ Alors :}$$

La matrice N , relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 , de la symétrie orthogonale par rapport à F est :

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$