

PREMIER PROBLÈME

Partie I

1. a. S est une matrice symétrique et réelle donc S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Faisons simple. ${}^tPP = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$${}^tPP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3+3 & \sqrt{3}-\sqrt{3} & \sqrt{6}-\sqrt{6} \\ \sqrt{3}-\sqrt{3} & 1+1+4 & \sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2} \\ \sqrt{6}-\sqrt{6} & \sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 2+2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ (P est une matrice orthogonale).

• Supposons que D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

$$D = I_3DI_3 = {}^tPPD{}^tPP = {}^tPSP. \text{ D'où l'unicité de } D.$$

• Dès lors posons $D = {}^tPSP$ et vérifions que D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

$$D = {}^tPSP = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 & 9\sqrt{2} \\ -3\sqrt{3} & 3 & 9\sqrt{2} \\ 0 & -6 & 9\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \text{ } D = {}^tPSP \text{ est bien une matrice diagonale de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

De plus $PD{}^tP = P{}^tPSP{}^tP = I_3SI_3 = S$.

Il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une seule telle que $S = PD{}^tP$. $D = {}^tPSP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Remarque On peut encore obtenir le résultat demandé en posant $X_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et en vérifiant que (X_1, X_2, X_3) est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associés aux valeurs propres 3, 3 et 9.

$$2. \text{ a. } M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. (M - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(M - 2I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. \quad \boxed{(M - 2I_3)^3 = I_3}.$$

b. Raisonnons par l'absurde. Supposons que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Remarquons alors que $H = (X - 2)^3 - 1 = (X - 3)(X^2 - 3X + 3)$ est un polynôme annulateur de M ayant pour unique racine réelle 3. Alors 3 est la seule valeur propre réelle possible de M . Mais M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc 3 est la seule valeur propre réelle de M et le sous-espace propre associé est égal à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La dimension de ce sous-espace propre est donc 3 et aussi $3 - \text{rg}(M - 3I_3)$ non ? Ainsi $\text{rg}(M - 3I_3) = 0$; $M - 3I_3$ est alors la matrice nulle. M vaut donc $3I_3$ ce qui contredit légèrement la définition initiale de M .

M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remarque Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (il est aisé de vérifier qu'elle possède trois valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} : 3, $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$).

$$\text{c. } {}^tMM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad \boxed{{}^tMM = S}.$$

Remarque Dès lors il n'est pas très surprenant que S soit symétrique et à valeurs propres positives ou nulles...

Partie II

1. Soient x et y deux éléments de \mathbb{R}^n de matrices X et Y dans la base \mathcal{B} .

$g(y)$ et $f(x)$ ont pour matrices tAY et AX dans la base \mathcal{B} .

Alors $\langle g(y), x \rangle = ({}^tAY)X = {}^tY({}^tA)X = {}^tYAX = \langle y, f(x) \rangle$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle g(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle}.$$

Reprenons un élément x dans \mathbb{R}^n et appliquons ce qui précède avec $y = f(x)$.

$$\text{Il vient : } \langle g(f(x)), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2. \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle (g \circ f)(x), x \rangle = \|f(x)\|^2}.$$

2. $g \circ f$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^n comme composée de deux endomorphismes de \mathbb{R}^n .

Soient x et y deux éléments de \mathbb{R}^n . Appliquons deux fois Q1.

$$\langle (g \circ f)(x), y \rangle = \langle g(f(x)), y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle.$$

$$\langle x, (g \circ f)(y) \rangle = \langle g(f(y)), x \rangle = \langle f(y), f(x) \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle.$$

Ainsi : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle (g \circ f)(x), y \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle$.

$$\boxed{g \circ f \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^n}.$$

Remarque On peut aussi obtenir ce résultat par des considérations matricielles. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n et la matrice de $g \circ f$ dans cette base est tAA donc est une matrice symétrique car ${}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA$. Ceci suffit pour conclure.

3. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n , $g \circ f$ est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de $g \circ f$. Il existe un élément non nul x de \mathbb{R}^n tel que $(g \circ f)(x) = \lambda x$.

$\|f(x)\|^2 = \langle (g \circ f)(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$. Alors $\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$ puisque x n'est pas nul.

λ est positif ou nul comme quotient d'un réel positif ou nul par un réel strictement positif.

Les valeurs propres de $g \circ f$ sont positives ou nulles.

4. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^n , le cours permet de dire que :

il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

5. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $g \circ f$ associées aux vecteurs propres e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

Q est la matrice de passage de la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ donc $Q^{-1} = {}^tQ$. Notons encore que tAA est la matrice de $g \circ f$ dans \mathcal{B} .

Alors la matrice de $g \circ f$ dans la base \mathcal{B}' est : $Q^{-1}{}^tAAQ = {}^tQ{}^tAAQ$.

Mais, pour tout élément i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $(g \circ f)(e'_i) = \lambda_i e'_i$.

Alors ${}^tQ{}^tAAQ$ est la matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Il est grand temps de traiter le problème... dans toute sa plénitude.

Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ n réels positifs ou nuls et Δ la matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff {}^tQ{}^tAAQ = {}^tQQ(\Delta^2){}^tQQ \iff {}^tQ{}^tAAQ = \Delta^2$.

$${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix}$$

${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i^2 = \lambda_i$.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ étant des réels positifs ou nuls on a : ${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Il existe un **unique** n -uplet $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ de réels positifs ou nuls tel que la matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$
 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q(\Delta^2){}^tQ$. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

6. Soient i et j deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $\langle (g \circ f)(e'_i), e'_j \rangle = \langle f(e'_i), f(e'_j) \rangle$.

Donc $\langle f(e'_i), f(e'_j) \rangle = \langle (g \circ f)(e'_i), e'_j \rangle = \langle \lambda_i e'_i, e'_j \rangle = \lambda_i \langle e'_i, e'_j \rangle$.

Rappelons que $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n .

Donc si i n'est pas égal à j : $\langle f(e'_i), f(e'_j) \rangle = \lambda_i \langle e'_i, e'_j \rangle = 0$.

De plus : $\|f(e'_j)\|^2 = \langle f(e'_j), f(e'_j) \rangle = \lambda_j \langle e'_j, e'_j \rangle = \lambda_j \|e'_j\|^2 = \lambda_j$. Alors $\|f(e'_j)\| = \sqrt{\lambda_j} = \mu_j$.

$(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n))$ est une famille orthogonale et pour tout élément j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.

7. a. A est inversible donc ${}^t A$ également. ${}^t A A$ est alors inversible comme produit de deux matrices inversibles. Par conséquent les valeurs propres de ${}^t A A$ donc de $g \circ f$ sont non nulles. Ainsi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels non nuls.

Comme $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, pour tout élément i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les nombres réels $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont tous non nuls.

7. b. Soient i et j deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $\langle \frac{1}{\mu_i} f(e'_i), \frac{1}{\mu_j} f(e'_j) \rangle = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle f(e'_i), f(e'_j) \rangle$.

Si i et j sont distincts, $\langle \frac{1}{\mu_i} f(e'_i), \frac{1}{\mu_j} f(e'_j) \rangle = 0$ car la famille $(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n))$ est orthogonale.

$\langle \frac{1}{\mu_j} f(e'_j), \frac{1}{\mu_j} f(e'_j) \rangle = \frac{1}{\mu_j^2} \langle f(e'_j), f(e'_j) \rangle = \frac{1}{\mu_j^2} \|f(e'_j)\|^2 = 1$ car $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.

Finalement la famille $(\frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \frac{1}{\mu_2} f(e'_2), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n))$ est orthonormale. Elle est donc libre.

$(\frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \frac{1}{\mu_2} f(e'_2), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n))$ est une famille libre de n éléments de \mathbb{R}^n qui est de dimension n .

C'est donc une base de \mathbb{R}^n .

Ainsi $\mathcal{C} = (\frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \frac{1}{\mu_2} f(e'_2), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n))$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n .

7. c. C'est très simple pourvu que l'on sache son cours. Un petit rappel s'impose.

E est un espace vectoriel de dimension non nulle p . \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 sont deux bases de E et $\text{Pas}(\mathcal{U}, \mathcal{U}_1)$ est la matrice de passage de \mathcal{U} à \mathcal{U}_1 .

E' est un espace vectoriel de dimension non nulle n . \mathcal{U}' et \mathcal{U}'_1 sont deux bases de E' et $\text{Pas}(\mathcal{U}', \mathcal{U}'_1)$ est la matrice de passage de \mathcal{U}' à \mathcal{U}'_1 .

f est une application linéaire de E dans E' . Alors :

$$M(f, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}'_1) = (\text{Pas}(\mathcal{U}', \mathcal{U}'_1))^{-1} M(f, \mathcal{U}, \mathcal{U}') \text{Pas}(\mathcal{U}, \mathcal{U}_1)$$

Appliquons. $A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (\text{Pas}(\mathcal{C}, \mathcal{B}))^{-1} M(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}) \text{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Or $(\text{Pas}(\mathcal{C}, \mathcal{B}))^{-1} = \text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = R$ et $\text{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} = Q^{-1} = {}^t Q$. Alors $A = R M(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}) {}^t Q$.

Cherchons : $M(f, \mathcal{B}', \mathcal{C})$. Observons que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e'_i) = \mu_i \left(\frac{1}{\mu_i} f(e'_i) \right)$.

Ainsi la matrice de f relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{C} est : $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$.

Finalement $A = R\Delta^t Q$.

Partie III

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 . Soit g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice ${}^t M$ dans \mathcal{B} . La matrice de $g \circ f$ dans \mathcal{B} est ${}^t M M = S$.

Posons $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}e_1 - \sqrt{3}e_2)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3)$ et $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 + \sqrt{2}e_3)$.

Des calculs élémentaires montrent que (e'_1, e'_2, e'_3) est une famille orthonormale de \mathbb{R}^3 . C'est donc une famille libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 qui est de dimension 3. Alors $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 .

Notons que la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' n'est autre que la matrice P . Or nous avons vu que :

$$S = PD^t P = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors $D = P^{-1}SP$ n'est autre que la matrice de $g \circ f$ dans la base \mathcal{B}' et ainsi \mathcal{B}' est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de $g \circ f$ respectivement associés aux valeurs propres 3, 3 et 9.

Nous pouvons alors appliquer la partie II car la matrice M est inversible (3 est sa seule valeur propre réelle).

Ainsi $M = R\Delta^t Q$ où Q est matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' (donc $Q = P$), $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et R est la matrice de passage de \mathcal{B} à $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}f(e'_1), \frac{1}{\sqrt{3}}f(e'_2), \frac{1}{3}f(e'_3)\right)$.

Déterminons R .

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}e_1 - \sqrt{3}e_2) \text{ et } M \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -2\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } f(e'_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{3}}f(e'_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3)$$

$$\text{On obtient de la même manière } \frac{1}{\sqrt{3}}f(e'_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3) \text{ et } \frac{1}{3}f(e'_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3).$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)\right) \text{ et } R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$M = R\Delta^t Q \text{ avec } R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

I Calcul d'une somme et d'une intégrale.

1. a. Soit n un élément de \mathbb{N}^* et x un élément de $]0, \pi[$.

$$1 + 2C_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx) = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikx} + e^{-ikx}) = 1 + \sum_{k=1}^n e^{ikx} + \sum_{k=1}^n e^{-ikx}.$$

Or $1 = e^{i0x}$ et $\sum_{k=1}^n e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx}$. Donc $1 + 2C_n(x) = e^{i0x} + \sum_{k=1}^n e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi[, 1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

b. Soient n un élément de \mathbb{N}^* et z un élément de \mathbb{C} différent de 1 **et de 0**.

$\sum_{k=-n}^n z^k$ est la somme de $2n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z le premier étant z^{-n} .

Ainsi : $\sum_{k=-n}^n z^k = z^{-n} \frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \{0, 1\}, \sum_{k=-n}^n z^k = z^{-n} \frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}.$$

c. Soit n un élément de \mathbb{N}^* et x un élément de $]0, \pi[$. e^{ix} est un élément de \mathbb{C} différent de 1 et 0 donc :

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n (e^{ix})^k = (e^{ix})^{-n} \frac{1 - (e^{ix})^{2n+1}}{1 - e^{ix}} = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

$$1 + 2C_n(x) = e^{-inx} \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{ix(-n + \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2})} \frac{-2i \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$1 + 2C_n(x) = e^{ix0} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \text{ En divisant par 2 il vient : } \frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi[, \frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Posons : $\forall x \in]0, \pi[, f_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

f_n coïncide sur $]0, \pi[$ avec $\frac{1}{2} + C_n$ qui est continue sur $[0, \pi]$. f_n est donc continue sur $]0, \pi[$ et prolongeable par continuité en 0. Ceci suffit pour obtenir la convergence de $J_n = \int_0^\pi f_n(t) dt$.

$$\text{De plus } J_n = \int_0^\pi f_n(t) dt = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + C_n(t) \right) dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} dt + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kt) dt = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, J_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \text{ existe et vaut } \frac{\pi}{2}.$$

3. $x \rightarrow \cos(ax) - 1$ et $x \rightarrow \sin \frac{x}{2}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . De plus cette dernière fonction ne s'annule pas sur $]0, \pi]$. Ainsi φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$.

$$\frac{\cos(ax) - 1}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{1 - \cos(ax)}{\sin \frac{x}{2}} \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{(ax)^2}{2}}{\frac{x}{2}} = -a^2 x.$$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - 1}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-a^2 x) = 0 = \varphi(0)$. Ainsi φ est continue en 0.

φ est donc continue sur $[0, \pi]$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$. Pour montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 , le théorème “de la limite de la dérivée” nous indique alors qu'il suffit de prouver que la restriction de φ' à $]0, \pi]$ admet une limite finie en 0.

$$\forall x \in]0, \pi], \varphi'(x) = \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} \left[-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (\cos(ax) - 1) \cos \frac{x}{2} \right].$$

$$\frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} \left[-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (\cos(ax) - 1) \cos \frac{x}{2} \right] \underset{0}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \left[-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (\cos(ax) - 1) \cos \frac{x}{2} \right].$$

Conditionnons le second membre pour en trouver plus simplement sa limite en 0.

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \left[-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (\cos(ax) - 1) \cos \frac{x}{2} \right] = -2a^2 \frac{\sin(ax)}{ax} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} + 2a^2 \cos \frac{x}{2} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$. De plus $\frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{(ax)^2}{2}}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} \left[-2a^2 \frac{\sin(ax)}{ax} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} + 2a^2 \cos \frac{x}{2} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} \right] = -2a^2 \times 1 \times 1 + 2a^2 \times 1 \times \frac{1}{2} = -a^2.$$

$$\text{Ou } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \left[-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (\cos(ax) - 1) \cos \frac{x}{2} \right] \right) = -a^2.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} \left[-a \sin(ax) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} (\cos(ax) - 1) \cos \frac{x}{2} \right] = -a^2 \quad (*).$$

Ceci achève de montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ et donne également $\varphi'(0) = -a^2$.

Remarque On peut aisément trouver la limite (*) en utilisant des développements limités.

4. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Une intégration par parties simple donne :

$$I_n = \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \left[\varphi(t) \left(-\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{n + \frac{1}{2}} \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi'(t) \left(-\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{n + \frac{1}{2}} \right) dt$$

car les fonctions φ et $t \rightarrow -\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{n + \frac{1}{2}}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$. Notons que $\varphi(0) = 0$ et que $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$.

$$\text{On obtient alors : } I_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt.$$

$$|I_n| = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left| \int_0^\pi \varphi'(t) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi |\varphi'(t)| |\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)| dt.$$

$$|I_n| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt. \text{ Par encadrement il vient sans difficulté } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}.$$

Remarque Il n'aura échappé à personne que nous venons de (re)démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue ou presque...

II Calcul de la somme d'une série

1. Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(at) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \cos(at) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt = \int_0^\pi \cos(at) C_n(t) dt.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^\pi \cos(at) \left(-\frac{1}{2} + C_n(t) + \frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(at) dt + \int_0^\pi \cos(at) \left(C_n(t) + \frac{1}{2}\right) dt.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(at)}{a} \right]_0^\pi + \int_0^\pi (\cos(at) - 1) \left(C_n(t) + \frac{1}{2}\right) dt + \int_0^\pi \left(C_n(t) + \frac{1}{2}\right) dt.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \int_0^\pi (\cos(at) - 1) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt + J_n. \text{ Ainsi :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2} I_n + J_n.}$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} I_n\right) = 0$ (d'après I.4.) et $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \frac{\pi}{2}$ (d'après I.2.).

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge et : } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}.}$

3. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $u_n = \int_0^\pi \cos(at) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(at + nt) + \cos(at - nt)) dt.$

$$u_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(at + nt)}{a + n} + \frac{\sin(at - nt)}{a - n} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a\pi + n\pi)}{n + a} - \frac{\sin(a\pi - n\pi)}{n - a} \right).$$

Or $\sin(a\pi + n\pi) = (-1)^n \sin(\pi a)$ et $\sin(a\pi - n\pi) = (-1)^n \sin(\pi a)$. Par conséquent :

$$u_n = \frac{1}{2} (-1)^n \sin(\pi a) \left(\frac{1}{n + a} - \frac{1}{n - a} \right) = \frac{1}{2} (-1)^n \sin(\pi a) \frac{(-2a)}{n^2 - a^2}. \text{ Finalement :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^{n-1} a \sin(\pi a)}{n^2 - a^2}.}$$

$$4. \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} a \sin(\pi a)}{n^2 - a^2} = \frac{\sin(\pi a)}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} a}{n^2 - a^2}.$$

En divisant par $\frac{\sin(\pi a)}{2}$ qui n'est pas nul, car a est un réel de l'intervalle $]0, 1[$, il vient :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} a}{n^2 - a^2}. \text{ Ainsi :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}.}$$

III Calcul d'une intégrale

1. Posons : $\forall t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{1+t^\alpha}$. f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t^\alpha} = 1$; f est donc prolongeable par continuité en 0 et ainsi $\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ existe.

$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ et f est positive, donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature. Comme α est strictement supérieur à 1, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ également. Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt \text{ existe.}}$$

2.a. Ici, pour être dans l'esprit du texte, nous considérerons que $t \rightarrow t^\alpha$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Soit t un élément de $[0, 1]$ et soit n un élément de \mathbb{N} . Observons que $-t^\alpha$ est différent de 1.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} = \frac{1 - (-t^\alpha)^{n+1}}{1 - (-t^\alpha)} + \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} = \frac{1}{1+t^\alpha}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}.}$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N} . $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \leq t^{(n+1)\alpha}$.

En intégrant entre 0 et 1 il vient : $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq \int_0^1 t^{(n+1)\alpha} dt = \left[\frac{t^{(n+1)\alpha+1}}{(n+1)\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)\alpha+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq \frac{1}{(n+1)\alpha+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)\alpha+1} = 0$, on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt = 0.}$$

c. En intégrant l'égalité de Q2. a. on obtient : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{t^{k\alpha+1}}{k\alpha+1} \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$$

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt; \text{ Q2. b. donne alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \right) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt = G(\alpha).$$

Donc la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

3. a. Soit A un réel strictement positif. Dans $\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ effectuons le changement de variable $u = t^{1-\alpha}$

$$(t = u^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ et } dt = \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1} du = \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} du).$$

$$\text{Alors } \int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \int_1^{A^{1-\alpha}} \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} du = \frac{1}{1-\alpha} \int_1^{A^{1-\alpha}} \frac{1}{u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + 1} du.$$

$$\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \int_{A^{1-\alpha}}^1 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} du \quad (**).$$

Comme $1-\alpha$ est strictement négatif : $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{1-\alpha} = 0$. De plus $\int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} du$ existe et vaut $G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$ car $\frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans $(**)$ on obtient : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$. Finalement :

$$\boxed{H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)}.$$

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \frac{1}{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1} + 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + \alpha - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\alpha - 1}.$$

$$\boxed{H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1}}.$$

$$\text{b. } F(\alpha) = G(\alpha) + H(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n\alpha - 1} - \frac{1}{n\alpha + 1} \right) \right].$$

Il vient alors sans difficulté :

$$\boxed{F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1}}.$$

4. α appartient à $]1, +\infty[$ donc $\frac{1}{\alpha}$ appartient à $]0, 1[$. Alors II Q4. donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} \frac{1}{\alpha}}{n^2 - \frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} - \alpha$.

Ou encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} \alpha}{n^2 \alpha^2 - 1} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} - \alpha$. En divisant par α on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2 \alpha^2 - 1} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} - 1$.

Alors $F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2 \alpha^2 - 1} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}$. Finalement :

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}.$$
