

PROBLÈME I

Preliminaires

1. a. Soit n un élément de \mathbb{N} .

$$\forall t \in]0, +\infty[, \frac{t^n e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} e^{-t^2} = (t^2)^{\frac{n+2}{2}} e^{-t^2}.$$

Or par croissance comparée $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$ donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((t^2)^\alpha e^{-t^2}) = 0$.

Alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((t^2)^{\frac{n+2}{2}} e^{-t^2}) = 0$. Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t^n e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N} . $f_n : t \rightarrow t^n e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

- $f_n(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.
- $\forall t \in [1, +\infty[, f_n(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge car $2 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que

$$\int_1^{+\infty} f_n(t) dt \text{ est convergente.}$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \text{ converge également puisque } f_n \text{ est continue sur } [0, 1].$$

Soit A un réel strictement négatif.

$$\text{Le changement de variable } u = -t \text{ donne sans difficulté : } \int_A^0 f_n(t) dt = - \int_{-A}^0 f_n(-u) du = \int_0^{-A} f_n(-u) du.$$

Observons que $\forall u \in \mathbb{R}$, $f_n(-u) = (-u)^n e^{-u^2} = (-1)^n u^n e^{-u^2} = (-1)^n f_n(u)$ (f_n a la parité de n).

$$\text{Alors } \int_A^0 f_n(t) dt = (-1)^n \int_0^{-A} f_n(u) du.$$

Or $\lim_{A \rightarrow -\infty} (-A) = +\infty$ et $\int_0^{+\infty} f_n(u) du$ converge. Ainsi $\int_{-\infty}^0 f_n(t) dt$ converge et vaut $(-1)^n \int_0^{+\infty} f_n(u) du$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut $(1 + (-1)^n) \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

Pour tout élément n de \mathbb{N} , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Remarque Si n est un élément pair de \mathbb{N} , $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

Si n est un élément impair de \mathbb{N} , $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = 0$.

2. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$.

Il existe un élément r de \mathbb{N} et un élément (a_0, a_1, \dots, a_r) de \mathbb{R}^{r+1} tel que $P = \sum_{n=0}^r a_n X^n$.

Pour tout élément n de $\llbracket 0, r \rrbracket$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^r a_n (t^n e^{-t^2}) \right) dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^r a_n t^n \right) e^{-t^2} dt$ converge. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge.

Pour tout élément P de $\mathbb{R}[X]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge.

3. a. Soit n un élément de \mathbb{N} . Soient A et B deux réels.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^{n+1}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = (n+1)t^n$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $v'(t) = t e^{-t^2}$.

Une intégration par parties simple donne alors :

$$\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \int_A^B u(t) v'(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_A^B - \int_A^B u'(t) v(t) dt.$$

$$\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \left[t^{n+1} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \right]_A^B - \int_A^B (n+1) t^n \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt.$$

$$\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} A^{n+1} e^{-A^2} - \frac{1}{2} B^{n+1} e^{-B^2} + \frac{n+1}{2} \int_A^B t^n e^{-t^2} dt.$$

D'après 1.a., $B^{n+1} e^{-B^2} = \underset{B \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{B^2} \right)$. Or $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B^2} = 0$. Ainsi $\lim_{B \rightarrow +\infty} \left(B^{n+1} e^{-B^2} \right) = 0$.

$\lim_{A \rightarrow -\infty} (-A) = +\infty$. Donc $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left((-A)^{n+1} e^{-(-A)^2} \right) = 0$ d'après ce que nous venons de voir.

Ainsi $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left((-1)^{n+1} \left(A^{n+1} e^{-A^2} \right) \right) = 0$ donc $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left(A^{n+1} e^{-A^2} \right) = 0$.

Alors $\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} A^{n+1} e^{-A^2} - \frac{1}{2} B^{n+1} e^{-B^2} + \frac{n+1}{2} \int_A^B t^n e^{-t^2} dt$, $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left(A^{n+1} e^{-A^2} \right) = 0$,

$\lim_{B \rightarrow +\infty} \left(B^{n+1} e^{-B^2} \right) = 0$, $I_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1} e^{-t^2} dt$ et $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ convergent.

Alors en faisant tendre A vers $-\infty$, puis B vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient : $I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n.}$$

b. Nous avons vu plus haut que si n est un élément impair de \mathbb{N} alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = 0.}$$

c. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

• $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Oublions le résultat proposé... pour tester le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. φ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$. Ce qui donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

$h : u \rightarrow e^{-u^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$, $\psi : t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{2}}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, +\infty[$, strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$ et définit une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) du$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\psi(t)) \psi'(t) dt$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) du = I_0$ existe donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\psi(t)) \psi'(t) dt$ existe et vaut I_0 .

$$\text{Ainsi } I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\psi(t)) \psi'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Alors $I_0 = \sqrt{\pi} = \frac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0} 0!} \sqrt{\pi}$ et la propriété est vraie pour $p = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément p de \mathbb{N} et montrons la pour $p + 1$.

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)} I_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)} (p+1)!} \sqrt{\pi}.$$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.}$$

I Recherche d'extremums locaux pour une fonction de deux variables réelles

1. Soit x et y deux réels.

$t \rightarrow (t-x)^2(t-y)^2$ est une fonction polynôme donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt$ est convergente d'après le préliminaire.

Par conséquent $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt$ existe.

$\forall t \in \mathbb{R}, (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = (t^2 - 2xt + x^2)(t^2 - 2yt + y^2) e^{-t^2}$. Alors :

$\forall t \in \mathbb{R}, (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = (t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 - 2(xy^2 + yx^2)t + x^2y^2) e^{-t^2}$.

$\forall t \in \mathbb{R}, (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = t^4 e^{-t^2} - 2(x+y)t^3 e^{-t^2} + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 e^{-t^2} - 2(xy^2 + yx^2)t e^{-t^2} + x^2y^2 e^{-t^2}$.

Rappelons que pour tout élément n de \mathbb{N} , $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge. Alors, par linéarité, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2 + 4xy + y^2)I_2 - 2(xy^2 + yx^2)I_1 + x^2y^2I_0.$$

Or $I_3 = I_1 = 0$. $I_0 = \sqrt{\pi}$, $I_2 = \frac{0+1}{2}I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et $I_4 = \frac{2+1}{2}I_2 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2\right)\sqrt{\pi}$.

Ainsi $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2.$$

2. F est une application polynômiale de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} donc F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . En particulier F possède des dérivées partielles premières en tout point de \mathbb{R}^2 .

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(2x + 4y) + 2xy^2 = x + 2y + 2xy^2$.

De même $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(4x + 2y) + 2x^2y = 2x + y + 2x^2y$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x + 2y + 2xy^2 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + y + 2x^2y.$$

Soit $X = (x, y)$ un élément de \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 = 0 \\ 2x + y + 2x^2y = 0 \end{cases}.$$

En remplaçant la seconde ligne par la seconde moins la première et en factorisant par $x - y$ il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 = 0 \\ (x - y)(1 + 2xy) = 0 \end{cases} \text{ . Alors :}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x = y \\ x(3 + 2x^2) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)y = 0 \end{cases} \text{ .}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x(3 + 2x^2) = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

$$\begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ .}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff X = (0, 0) \text{ ou } X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } X = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

F possède exactement trois points critiques : $O = (0, 0)$, $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. F est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 donc si F possède un extremum en un point X de \mathbb{R}^2 alors son gradient s'annule en X et ainsi $\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0$.

Alors F ne peut admettre un extremum local qu'en O , A ou B .

Nous avons vu que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

Rappelons que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x + 2y + 2xy^2$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + y + 2x^2y$.

Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 1 + 2y^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 1 + 2x^2$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = 2 + 4xy$.

En utilisant les notations de Monge on obtient en $O = (0, 0)$: $rt - s^2 = 1 \times 1 - 2^2 = -3 < 0$. F ne possède pas d'extremum local en $O = (0, 0)$.

En $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ on obtient : $rt - s^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$ et $r = 2 > 0$.

F possède en $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un minimum local.

Notons encore que $F(A) = F(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

En $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ F possède un minimum local qui vaut $\frac{1}{2}$.
De plus ce sont les seuls points de \mathbb{R}^2 où F possède un extremum local.

Remarque Vous avez dit local ? Mouais ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}((x + y)^2 + 2xy) + (xy)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + y)^2 + (xy)^2 + (xy) + \frac{1}{4}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \left(xy + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ainsi F admet un minimum global qui vaut $\frac{1}{2}$ atteint en les seuls points A et B .

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Soit x un réel. $\varphi_x : x \rightarrow \sin(xt) e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |\varphi_x(t)| = |\sin(xt)| e^{-t^2} \leq e^{-t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge car } I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que

$$\int_0^{+\infty} |\varphi_x(t)| dt \text{ converge. Ainsi } \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

$\psi_x : x \rightarrow t \cos(xt) e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |\psi_x(t)| = |\cos(xt)| t e^{-t^2} \leq t e^{-t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt \text{ converge car } I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que

$$\int_0^{+\infty} |\psi_x(t)| dt \text{ converge. Ainsi } \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt \text{ convergent.}$$

2. Soit a et λ deux réels. \sin est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . L'inégalité de Taylor-lagrange appliquée à \sin à l'ordre 1 donne :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - (a + \lambda - a) \sin'(a)| \leq \frac{|a + \lambda - a|^2}{2} \underset{u \in [\min(a, a+\lambda), \max(a, a+\lambda)]}{\text{Max}} |\sin''(u)|.$$

$$\text{Ainsi } |\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2} \underset{u \in [\min(a, a+\lambda), \max(a, a+\lambda)]}{\text{Max}} |-\sin(u)| \leq \frac{\lambda^2}{2}. \text{ Finalement :}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, |\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

3. a. Soit x un réel et h un réel non nul. Posons $\Delta_x(h) = \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x)$.

$$\Delta_x(h) = \frac{1}{h} (S(x+h) - S(x) - h C(x)).$$

$$\Delta_x(h) = \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} \sin((x+h)t) e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt - h \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt \right).$$

$$\Delta_x(h) = \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} (\sin(xt+ht) + \sin(xt) - ht \cos(xt)) e^{-t^2} dt \right).$$

Soit A un réel strictement positif.

$$\left| \int_0^A \left(\sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \int_0^A \left| \sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right| e^{-t^2} dt.$$

En utilisant le résultat de **2.** (avec $a = xt$ et $\lambda = ht$) il vient :

$$\left| \int_0^A \left(\sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \int_0^A \frac{(ht)^2}{2} e^{-t^2} dt = \frac{h^2}{2} \int_0^A t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \text{ existent.}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient alors :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{|h|^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Alors } |\Delta_x(h)| = \frac{1}{|h|} \left| \int_0^{+\infty} \left(\sin(xt+ht) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Ainsi } |\Delta_x(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \text{ pour tout réel } h \text{ non nul.}$$

En faisant tendre h vers zéro il vient par encadrement : $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_x(h) = 0$.

$$\text{Ainsi } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

$$\text{b. Soit } x \text{ un élément de } \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0 \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x).$$

Alors S est dérivable en x et $S'(x) = C(x)$.

$$S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}, S'(x) = C(x).$$

4. a. Soit x un élément de \mathbb{R} .

Soit A un réel strictement positif. Posons ici $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \cos(xt)$ et $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = -x \sin(xt)$ et $\forall t \in \mathbb{R}, v'(t) = t e^{-t^2}$.

De plus $\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \int_0^A u(t) v'(t) dt$. En intégrant par parties il vient alors :

$$\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \left[\cos(xt) \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \right]_0^A - \int_0^A (-x \sin(xt)) \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt.$$

$$\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(xA) e^{-A^2} - \frac{x}{2} \int_0^A \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad (\star).$$

Notons que $\left| \cos(xA) e^{-A^2} \right| = |\cos(xA)| e^{-A^2} \leq e^{-A^2}$ donc, par encadrement $\lim_{A \rightarrow +\infty} (\cos(xA) e^{-A^2}) = 0$ car

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A^2} = 0.$$

De plus $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$ converge donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (★) il vient :

$$\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt; \text{ soit encore : } C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

b. Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \ell(x) = 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) - \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$.

$x \rightarrow 2 e^{\frac{x^2}{4}}$ et S sont dérivables sur \mathbb{R} donc $x \rightarrow 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

$x \rightarrow e^{\frac{x^2}{4}}$ est continue sur \mathbb{R} . Alors $x \rightarrow \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ est une primitive de cette fonction sur \mathbb{R} . Ainsi

$x \rightarrow \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ est dérivable sur \mathbb{R} .

ℓ est donc dérivable sur \mathbb{R} comme différence de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

$$\text{De plus } \forall x \in \mathbb{R}, \ell'(x) = 2 \left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2 e^{\frac{x^2}{4}} S'(x) - e^{\frac{x^2}{4}} = 2 e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2} S(x) - \frac{1}{2} + S'(x)\right).$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, \ell'(x) = 2 e^{\frac{x^2}{4}} (-C(x) + S'(x)) = 0.$$

Par conséquent ℓ est constante sur \mathbb{R} . Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ell(x) = \ell(0)$.

$$\text{Or } \ell(0) = 2 e^{\frac{0^2}{4}} S(0) - \int_0^0 e^{\frac{t^2}{4}} dt = 2 S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0 \times t) e^{-t^2} dt = 0.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) - \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \ell(x) = 0$. Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

c. $\forall x \in \mathbb{R}, 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2 e^{\frac{x^2}{4}}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt \text{ et } S'(x) = C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

III Obtention d'un développement limité

1. Soit x un réel. $t \rightarrow \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

De plus $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1}{1+x^2 t^2} \leq 1$ et $0 \leq e^{-t^2}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq e^{-t^2}$.

La convergence de $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

Pour tout réel x , $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

2. a. Soit u un réel positif ou nul. $1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} = \frac{(1-u+u^2)(1+u) - 1}{1+u} = \frac{(1+u^3) - 1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}$.
 Or $0 \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$ et $0 \leq u^3$ donc $0 \leq \frac{u^3}{1+u} \leq u^3$. Ainsi $0 \leq 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} \leq u^3$.

$\forall u \in [0, +\infty[, 0 \leq 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} \leq u^3$.

b. Soit x un réel. $t \rightarrow 1 - x^2 t^2 + x^4 t^4$ est une fonction polynôme donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - x^2 t^2 + x^4 t^4 - \frac{1}{1+x^2 t^2} \right) e^{-t^2} dt.$$

$\forall t \in \mathbb{R}, x^2 t^2 \in [0, +\infty[$ donc d'après ce qui précède : $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - x^2 t^2 + x^4 t^4 - \frac{1}{1+x^2 t^2} \leq (x^2 t^2)^3$.

Comme $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \geq 0 : 0 \leq (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq x^6 t^6 e^{-t^2}$ pour tout réel t .

Alors $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt$ car toutes les intégrales convergent.

Ainsi $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt$.

Remarquons que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt = x^6 I_6 = x^6 \frac{4+1}{2} I_4 = x^6 \frac{5}{2} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$. Finalement :

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt = I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} x^4$.

Posons $Q = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} X^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} X^4$. Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 4 donc de degré inférieur ou égal à 5.

Montrons que $g(x) = Q(x) + o(x^5)$ au voisinage de 0. Nous pourrions alors dire que g possède un développement limité à l'ordre 5 en 0 de partie régulière Q .

Pour cela il suffit de montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - Q(x)}{x^5} = 0$ ou que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq Q(x) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |Q(x) - g(x)| = Q(x) - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6 \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} |x|^6.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq \left| \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} \right| \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} |x|.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15\sqrt{\pi}}{8} |x| = 0 \text{ donc par encadrement il vient } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} = 0.$$

Ceci achève de montrer que $g(x) = Q(x) + o(x^5)$ au voisinage de 0 avec $Q = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} X^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} X^4$. Ainsi :

$$g \text{ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 qui est : } g(x) = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} x^4 + o(x^5).$$

IV Nature d'une série

1. Soit p un élément de \mathbb{N} . $t \rightarrow \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2} \text{ et } \frac{1}{(2p)!} I_{2p} = \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence

$$\text{de } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

2. Soit p un élément de \mathbb{N} . $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2}$.

$$\text{Ainsi } 0 \leq u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt = \frac{1}{(2p)!} I_{2p} \text{ car ces intégrales convergent.}$$

$$\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N}, 0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} \text{ donc } \forall p \in \mathbb{N}, \frac{I_{2p}}{(2p)!} = \sqrt{\pi} \frac{(1/4)^p}{p!}. \text{ Ainsi } \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_p \leq \sqrt{\pi} \frac{(1/4)^p}{p!}.$$

La convergence de la série de terme général $\frac{(1/4)^p}{p!}$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_p .

$$\text{La série de terme général } u_p \text{ converge.}$$

PROBLÈME II

1. a. Par définition même de la matrice C on a,

$$\boxed{\text{pour tout élément } i \text{ de } \llbracket 1, n-1 \rrbracket : f(e_i) = e_{i+1}.}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout élément j de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$.

La propriété est vraie pour $j = 0$ car $f^0 = \text{id}$.

Supposons la propriété vraie pour un élément j de $\llbracket 0, n-2 \rrbracket$ et montrons la pour $j+1$.

Par hypothèse $f^j(e_1) = e_{j+1}$. Alors $f^{j+1}(e_1) = f(f^j(e_1)) = f(e_{j+1}) = f(e_{j+1+1})$ d'après **a.**

Ainsi s'achève la récurrence. Donc $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$. En particulier :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f^j(e_1) = e_{j+1}.}$$

Remarque On a alors $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$.

Par définition de la matrice C : $f(e_n) = -a_0 e_1 - a_1 e_2 - \dots - a_{n-2} e_{n-1} - a_{n-1} e_n$.

Donc $f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1)) = f(e_{n-1+1}) = f(e_n) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-2} e_{n-1} + a_{n-1} e_n)$.

$$\boxed{f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-2} e_{n-1} + a_{n-1} e_n) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+1}.}$$

2. a. $g(e_1) = f^n(e_1) + a_{n-1} f^{n-1}(e_1) + \dots + a_1 f(e_1) + a_0 \text{id}(e_1) = f^n(e_1) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(e_1)$.

En utilisant **1.** on obtient : $g(e_1) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+1} = 0_{\mathbb{C}^n}$.

$$\boxed{g(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

b. Soit i un élément de \mathbb{N} . $g \circ f^i = \left(f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) \circ f^i = f^{n+i} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}$.

Alors : $g \circ f^i = f^{i+n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{i+k} = f^i \circ \left(f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) = f^i \circ g$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, g \circ f^i = f^i \circ g.}$$

c. Soit i un élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$f^i(e_1) = e_{i+1}. \text{ Donc } g(e_{i+1}) = g(f^i(e_1)) = (g \circ f^i)(e_1) = (f^i \circ g)(e_1) = (f^i(g(e_1))) = f^i(0_{\mathbb{C}^n}) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Alors $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, g(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$. Ou :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(e_i) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Remarque P est également un polynôme annulateur de C donc de sa matrice compagnon.

d. Ainsi l'endomorphisme g coïncide avec l'endomorphisme nul de \mathbb{C}^n sur la base \mathcal{B}_0 .

Ces deux endomorphismes sont donc égaux. Par conséquent $g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$.

Or $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0 \text{id} = P(f)$. Finalement $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$.

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ est un polynôme annulateur de } f.$$

Application 1: Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A est la matrice compagnon du polynôme $P_A = X^5 + (-0)X^4 + (-1)X^3 + (-2)X^2 + (-0)X + (-1)!$

$P_A = X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$ et P_A est un polynôme annulateur de A . Alors $A^5 - A^3 - 2A^2 - I_5 = 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{C})}$.

Par conséquent $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_5(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5.$$

e. P est un polynôme annulateur de f donc les valeurs propres de f sont des racines de P . Or l'ensemble des valeurs propres de f est aussi l'ensemble des valeurs propres de C . Ainsi

$$\text{les valeurs propres de } C \text{ sont des racines de } P.$$

3. a. $Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_{j+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i$.

$$Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_{j+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i.$$

b. Reprenons le polynôme Q de la question précédente. Observons que c'est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n - 1$ **quelconque**.

Supposons que Q est un polynôme annulateur de f . Alors $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$. En particulier $Q(f)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Donc $\sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i = 0_{\mathbb{C}^n}$. Comme la famille $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_{i-1} = 0$.

Alors $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est le polynôme nul ce qui contredit l'hypothèse.

Il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et annulateur de f .

c. Soit λ une racine de P .

$P(f) = ((X - \lambda)R)(f) = (X - \lambda)(f) \circ R(f) = (f - \lambda \text{Id}) \circ R(f)$. Comme $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$:

$$(f - \lambda \text{Id}) \circ R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}.$$

d. Reprenons les hypothèses du **c.**

$P = (X - \lambda)R$ et P est de degré n donc R est un polynôme de degré $n - 1$.

En particulier R est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Alors R n'est pas un polynôme annulateur de f .

Ainsi $R(f) \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ donc **il existe** un élément a de \mathbb{C}^n tel que $R(f)(a)$ ne soit pas le vecteur nul.

Posons $b = R(f)(a)$. b est non nul.

De plus : $(f - \lambda \text{id})(b) = (f - \lambda \text{id})(R(f)(a)) = ((f - \lambda \text{id}) \circ R(f))(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}(a) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

b n'est pas le vecteur nul et $(f - \lambda \text{id})(b) = 0_{\mathbb{C}^n}$ donc λ est une valeur propre de f donc également de C .

Toutes les racines de P sont des valeurs propres de C .

Remarques 1. On pouvait également raisonner par l'absurde. On supposant que λ n'est pas valeur propre de f on obtient l'existence de $(f - \lambda \text{id})^{-1}$ qui permet d'obtenir (par composition) $R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ donc une contradiction.

2. Notons que **2. e.** et **3. d.** montrent que l'ensemble des valeurs propres de C est l'ensemble des racines de P .

4. a. Soit x un élément de \mathbb{C} . Pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ notons H_k la $k^{\text{ème}}$ colonne de $C - xI_n$.

Pour montrer que $C - xI_n$ est de rang au moins $n - 1$ il suffit de montrer que la famille $(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$ est libre non ?

Notons encore (E_1, E_2, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $H_k = -x E_k + E_{k+1}$.

Soit $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ un élément de \mathbb{C}^{n-1} tel que $\sum_{k=1}^{n-1} z_k H_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = \sum_{k=1}^{n-1} z_k H_k = \sum_{k=1}^{n-1} (z_k (-x) E_k + z_k E_{k+1}) = - \sum_{k=1}^{n-1} (z_k x E_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (z_k E_{k+1}).$$

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = - \sum_{k=1}^{n-1} (z_k x E_k) + \sum_{k=2}^n (z_{k-1} E_k) = -z_1 x E_1 + \sum_{k=2}^{n-1} ((-z_k x + z_{k-1}) E_k) + z_{n-1} E_n.$$

(E_1, E_2, \dots, E_n) étant une famille libre on obtient : $-z_1 x = 0$, $\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $-z_k x + z_{k-1} = 0$ et $z_{n-1} = 0$.

Ne reste plus qu'à démontrer par une petite récurrence descendante que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $z_k = 0$.

La propriété est vraie pour $n-1$. Supposons la vraie pour k dans $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et montrons la pour $k-1$.

Par hypothèse $z_k = 0$. Or $-z_k x + z_{k-1} = 0$ donc $z_{k-1} = 0$. Ce qui achève la récurrence !

Ainsi $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $z_k = 0$. La famille $(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$ est donc libre et $C - x I_n$ est au moins de rang $n-1$.

Pour tout nombre complexe x , la matrice $C - x I_n$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$.

Soit λ une valeur propre de C donc de f . La dimension du sous-espace propre SEP (C, λ) de C associé à λ est la même que la dimension du sous-espace propre SEP (f, λ) de f associé à λ .

Ainsi $\dim \text{SEP}(C, \lambda) = \dim \text{SEP}(f, \lambda) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = \dim \mathbb{C}^n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}) = n - \text{rg}(C - \lambda I_n)$.

Or $\text{rg}(C - \lambda I_n) \geq n-1$ donc $n - \text{rg}(C - \lambda I_n) \leq 1$ Ainsi $\dim \text{SEP}(C, \lambda) \leq 1$. Or la dimension d'un sous-espace propre est toujours supérieure ou égale à 1. Par conséquent $\text{SEP}(C, \lambda)$ est de dimension 1.

Chaque sous espace propre de C est de dimension 1.

b. Les sous-espaces propres de C étant de dimension 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de C est égale au nombre de valeurs propres distinctes de C c'est à dire au nombre de racines distinctes de P .

Rappelons que C est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n . Alors :

C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5. a. Application 2 : Notons que A_1 est la matrice compagnon du polynôme $P_{A_1} = X^4 - 1$.

Or P_{A_1} admet quatre racines distinctes dans \mathbb{C} : $1, -1, i$ et $-i$. Ainsi :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}$$

b. Application 3: Notons que A_2 est la matrice compagnon du polynôme $P_{A_2} = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$.

1 est racine de P_{A_2} . De plus $P_{A_2} = (X - 1)(X^3 - X^2 - 4X + 4) = (X - 1)(X^2(X - 1) - 4(X - 1))$.

Alors $P_{A_2} = (X - 1)^2(X^2 - 4) = (X - 1)^2(X - 2)(X + 2)$.

P_{A_2} n'a que trois racines distinctes dans \mathbb{C} : 1, 2 et -2 donc

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

6. a. Le cours indique que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors ${}^t M$ est inversible si et seulement si M est inversible.

Pour tout nombre complexe t : $B - tI_n = {}^t C - t{}^t I_n = {}^t(C - tI_n)$.

Ainsi $B - tI_n$ est inversible si et seulement si $C - tI_n$ est inversible.

pour tout nombre complexe t , $B - tI_n$ est inversible si et seulement si $C - tI_n$ est inversible.

b. Soit λ un complexe. Ce qui précède permet de dire que $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible si et seulement si $C - \lambda I_n$ est n'est pas inversible.

Alors λ est valeur propre de B si et seulement si λ est valeur propre de C .

B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ un élément de \mathbb{C} et soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Notons que $B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$.

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, -\lambda u_k + u_{k+1} = 0 \text{ et } -a_0 u_1 - a_1 u_2 - \cdots - a_{n-2} u_{n-1} - (\lambda + a_{n-1}) u_n = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, u_{k+1} = \lambda u_k \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{k+1} + \lambda u_n = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} (a_k \lambda^k u_1) + \lambda \lambda^{n-1} u_1 = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \text{ et } \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k + \lambda^n \right) u_1 = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \text{ et } P(\lambda) u_1 = 0.$$

Or $P(\lambda) = 0$. Donc $U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \iff U \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right)$.

Une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ est : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right)$.

d. P admet n racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Or les valeurs propres de B sont les valeurs propres de C qui sont les racines de P .

Ainsi B admet n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. B est alors diagonalisable.

Posons pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket, U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix}$.

Pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket, (U_k)$ est une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ_k .

Comme B est diagonalisable, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe des sous-espaces propres de B donc (U_1, U_2, \dots, U_n) est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Notons V la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base (U_1, U_2, \dots, U_n) .

V est inversible comme matrice de passage et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ par définition même de U_1, U_2, \dots, U_n .

B est diagonalisable et la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. a. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}, u^k(\varepsilon_i) = \mu_i^k \varepsilon_i$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u^k(a) = u^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) = u^k(\varepsilon_1) + u^k(\varepsilon_2) + \cdots + u^k(\varepsilon_n) = \mu_1^k \varepsilon_1 + \mu_2^k \varepsilon_2 + \cdots + \mu_n^k \varepsilon_n.$$

Pour tout k dans \mathbb{N} , la matrice de $u^k(a)$ dans la base \mathcal{E} est $S_k = \begin{pmatrix} \mu_1^k \\ \mu_2^k \\ \vdots \\ \mu_n^k \end{pmatrix}$.

E étant de dimension n , la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E si et seulement si elle est de rang n ou si et seulement si la famille $(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$ est de rang n .

$(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$ est de rang n si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de rang n .

Or cette matrice est $W = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et sa transposée est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Comme les complexes $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont deux à deux distincts, d'après **6. d.** cette dernière matrice est inversible. Alors W est inversible donc \mathcal{B}_a est de rang n .

Ceci achève de montrer que \mathcal{B}_a est une base de E .

Si $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$ alors $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .

b. Déterminons la matrice de u dans \mathcal{B}_a . Constatons que $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, u(u^k(a)) = u^{k+1}(a)$!

De plus $u(u^{n-1}(a)) = u^n(a)$. Soit $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ la famille des coordonnées de $u^n(a)$ dans la base \mathcal{B}_a .

Posons $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, b_k = -c_k$. Alors $u(u^{n-1}(a)) = u^n(a) = -b_0 a - b_1 u(a) - \cdots - b_{n-1} u^{n-1}(a)$.

Ainsi la matrice de u dans la base \mathcal{B}_a est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice compagnon du polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$.

Il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .
