

PREMIER PROBLÈME

Partie I Étude de l'application f .

1. $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $x \rightarrow \ln(1+x)$ sont continues en tout point de $]0, +\infty[$ donc, par produit, f est continue en tout point de $]0, +\infty[$.

$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$.

Nous avons alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. f est donc continue en 0.

f est continue sur $]0, +\infty[$.

2. a. $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ comme fonction rationnelle.

$x \rightarrow x+1$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$; $\forall x \in]0, +\infty[$, $1+x \in \mathbb{R}^{+*}$; \ln est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

Alors, par composition, $x \rightarrow \ln(1+x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

Ainsi par produit f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x} x - \ln(1+x) \right) = \frac{A(x)}{x^2}$.

f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) = \frac{A(x)}{x^2}$.

b. Au voisinage de 0, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ donc $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$.

Au voisinage de 0 on a aussi $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Alors, au voisinage de 0, $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = (x - x^2) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Alors $\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}$. Ainsi :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

c. ► Version 1 Avec le théorème de la "limite de la dérivée" (au programme ?).

- f est continue sur $[0, +\infty[$;
- f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$;
- f' admet une limite finie à droite en 0 qui vaut $-\frac{1}{2}$.

Alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

► Version 2 : avec le théorème du cours sur le prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Posons $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Tout ce qui précède montre que :

- g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$;
- g' admet une limite finie à droite en 0.

Alors g se prolonge en une fonction \hat{g} de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. Notons que f et \hat{g} coïncident sur $]0, +\infty[$.

Or $\hat{g}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \hat{g}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. f et \hat{g} coïncident en 0.

Finalement $f = \hat{g}$ et ainsi f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

En particulier $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

d. $x \rightarrow \frac{x}{1+x}$ et $x \rightarrow \ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc A est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, A'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

A est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $A'(x) < 0$ donc A est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Notons encore que $A(0) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) = -\infty$.

$$\boxed{A \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[, A(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = -\infty.}$$

A étant strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $A(x) < A(0) = 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0$. f étant continue sur $[0, +\infty[$ on peut alors dire que :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[.}$$

e. $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$.

Alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

3. a. Rappelons que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.

Rappelons également que : A est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[$, $A'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$.

Ainsi A est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , $x \rightarrow \frac{A(x)}{x^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

Alors f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$. Ce qui suffit pour dire que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

De plus : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x^4} (A'(x)x^2 - A(x)(2x)) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{x}{(1+x)^2} x - 2 \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) \right)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{x^2 + 2x(1+x)}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x) \right) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x) \right)$.

$$f \text{ est deux fois dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^3} \left(-\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x) \right) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

b. $x \rightarrow -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2}$ et $x \rightarrow 2 \ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc B est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, B'(x) = -\frac{(6x+2)(1+x)^2 - (3x^2+2x)2(1+x)}{(1+x)^4} + \frac{2}{(1+x)}.$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, B'(x) = -\frac{2(3x+1)(1+x) - 2(3x^2+2x)}{(1+x)^3} + \frac{2}{(1+x)}.$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, B'(x) = 2 \frac{-(3x^2+4x+1) + (3x^2+2x) + (1+x)^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^2}{(1+x)^3}.$$

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $B'(x) \geq 0$. B est croissante sur $[0, +\infty[$. Notons que $B(0) = 0$.

Notons encore que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} \right) = -3$ car $-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{3x^2}{x^2} = -3$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x) \right) = +\infty$.

$$B \text{ est croissante sur } [0, +\infty[, B(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = +\infty.$$

$B(0) = 0$ et B est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $B(x) \geq 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} \geq 0$. Ainsi :

$$f \text{ est convexe sur }]0, +\infty[.$$

Remarque f est même convexe sur $[0, +\infty[$. En effet f' est continue sur $[0, +\infty[$ et de dérivée positive sur $]0, +\infty[$. Donc f' est croissante sur $[0, +\infty[$ et f est alors convexe sur $[0, +\infty[$.

Exercice Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, +\infty[$ et que $f''(0) = \frac{2}{3}$.

4. RAS!! Il convient simplement de se rappeler que :

- $f(0) = 1$.
- f est (strictement) décroissante sur $[0, +\infty[$.
- La demi-tangente au point d'abscisse 0 est portée par la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
- La courbe représentative de f est au-dessus de sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Partie II Un développement en série.

1. Soit N dans \mathbb{N} et soit t un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^N (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1 - (-t)} = \frac{1 - (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1 + t} \text{ car } -t \text{ n'est pas égal à } 1.$$

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \text{ donc } \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. Soit N dans \mathbb{N} et soit x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

$$\forall t \in [0, 1], \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

En intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale il vient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k=0}^N (-1)^k \int_0^x t^k dt + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$$

$$\text{Or } \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = [\ln|1+t|]_0^x = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

$$\text{Alors } \ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$$

$$\text{Si } N \in \mathbb{N} \text{ et si } x \in [0, 1], \ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x) \text{ où } J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$$

3. Soit N dans \mathbb{N} et soit x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

$$\text{Comme } 0 \leq x, |J_N(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt.$$

$$\text{Or } \forall t \in [0, x], \frac{1}{1+t} \leq 1 \text{ et } t^{N+1} \geq 0 \text{ donc } \forall t \in [0, x], \frac{t^{N+1}}{1+t} \leq t^{N+1}.$$

$$\text{Alors } |J_N(x)| \leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{N+1} dt = \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \forall N \in \mathbb{N}, |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.}$$

4. Soit x un élément de $[0, 1]$.

$$\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2} \text{ et } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+2} = 0.$$

Par encadrement on obtient alors : $\lim_{N \rightarrow +\infty} J_N(x) = 0$.

$$\text{Or } \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - J_N(x). \text{ Donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x).$$

Alors la série de terme général $\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$. En translatant on peut

dire que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], \text{ la série de terme général } \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x).}$$

Exercice Montrer que ce résultat vaut encore pour $x \in]-1, 0[$.

Partie III Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

1. Soit N un élément de \mathbb{N} et x un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| = |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}. \text{ Ce qui donne : } \left| x f(x) - x \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

$$\text{Alors : } x \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| = |x| \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| = \left| x f(x) - x \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

$$\text{En divisant par } x \text{ qui est strictement positif on obtient : } \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

Notons que $x \rightarrow f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1}$ et $x \rightarrow \frac{x^{N+1}}{N+2}$ prennent la valeur 0 en 0 donc l'inégalité précédente vaut encore pour $x = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \forall N \in \mathbb{N}, \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.}$$

2. Soit N un élément de \mathbb{N} .

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) dx = \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k+1} \int_0^1 x^k dt = \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) dx = \int_0^1 f(x) dx - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \text{ Alors :}$$

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \left| \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) dx \right| \leq \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| dx.$$

$$\text{Donc } 0 \leq \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| \leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2} dx = \frac{1}{(N+2)^2}.$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+2)^2} = 0$. Alors par encadrement on obtient : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x) dx$. Ceci suffit pour dire que :

la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x) dt$.

3. Soit N un élément de \mathbb{N}^* .

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{1 \leq 2p+1 \leq 2N+1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{1 \leq 2p \leq 2N+1} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{1 \leq 2p+1 \leq 2N+1} \frac{(-1)^{(2p+1)-1}}{(2p+1)^2} + \sum_{1 \leq 2p \leq 2N+1} \frac{(-1)^{(2p)-1}}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$$

Pour tout élément N de \mathbb{N}^* , $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}$.

Pour tout élément N de \mathbb{N}^* , $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}$.

4. Soit N un élément de \mathbb{N}^* . En soustrayant les deux égalités de Q3 on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 2 \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} \text{ ou } \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^2}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$. Alors :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie IV Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles.

1. Rappelons que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Posons que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\widehat{F}(x) = \int_0^x f(t) dt$.

\widehat{F} est la primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

Donc \widehat{F} est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\widehat{F}'(x) = f(x)$. Ainsi \widehat{F}' est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

Finalement \widehat{F} est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$. Alors la restriction F de \widehat{F} à $]0, +\infty[$ est de classe \mathcal{C}^2 sur cet intervalle.

Notons aussi que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = f(x)$ et $F''(x) = f'(x)$.

- $u : (x, y) \rightarrow xy$, $v : (x, y) \rightarrow x$ et $w : (x, y) \rightarrow y$ sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[^2$ comme fonctions polynômes ;
- $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $u(x, y) > 0$, $v(x, y) > 0$ et $w(x, y) > 0$;
- F est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

Par composition $(x, y) \rightarrow F(xy)$, $(x, y) \rightarrow F(x)$ et $(x, y) \rightarrow F(y)$ sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[^2$.

G est alors une combinaison linéaire de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[^2$. Ainsi :

$$G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[^2.$$

Soit (x, y) un élément de $]0, +\infty[^2$.

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) F'(u(x, y)) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) F'(v(x, y)) - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) F'(w(x, y)) = y f(xy) - 1 \times f(x) - 0 \times f(y).$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = y f(xy) - f(x). \text{ De même } \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = x f(xy) - f(y).$$

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = y f(xy) - f(x) \text{ et } \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = x f(xy) - f(y).$$

Soit (x, y) un élément de $]0, +\infty[^2$. En procédant comme pour les dérivées partielles premières on obtient :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = y^2 f'(xy) - f'(x), \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x, y) = f(xy) + yx f'(xy) \text{ et } \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = x^2 f'(xy) - f'(y).$$

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = y^2 f'(xy) - f'(x) \text{ et } \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = x^2 f'(xy) - f'(y).$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x, y) = f(xy) + yx f'(xy).$$

2. Soit $X = (x, y)$ un élément de $]0, +\infty[^2$.

$$\frac{\partial G}{\partial x}(X) = \frac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(xy) - f(y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 \\ \frac{\ln(1+xy)}{y} - \frac{\ln(1+y)}{y} = 0 \end{cases}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(X) = \frac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \iff \ln(1+xy) = \ln(1+x) = \ln(1+y) = 0 \iff 1+xy = 1+x = 1+y.$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(X) = \frac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \iff xy = x = y \iff x = y \text{ et } x^2 = x \iff x = y = 1 \text{ (car } x \text{ est strictement positif)}.$$

G admet $(1, 1)$ comme unique point critique.

3. $]0, +\infty[^2$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 comme produit de deux ouverts de \mathbb{R} et G est de classe \mathcal{C}^1 sur cet ouvert.

Ainsi si G admet un extremum en un point de $]0, +\infty[^2$, ce point est un point critique de G c'est donc $(1, 1)$.

Posons $A = (1, 1)$, $r = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(A)$, $s = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(A)$ et $t = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(A)$.

$$r = 1^2 f'(1 \times 1) - f'(1) = 0 \text{ et } s = f(1 \times 1) + 1 \times 1 f'(1 \times 1) = f(1) + f'(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{2}.$$

Alors $rt - s^2 = -s^2 = -\frac{1}{4} < 0$ donc G n'admet pas d'extremum en $A = (1, 1)$.

G n'admet pas d'extremum local.

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I Étude d'un endomorphisme de E .

1. Soit P un élément de E . $(X^2 - 1)P$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n+2$ donc $((X^2 - 1)P)''$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n soit un élément de E .

Pour tout polynôme P de E , $((X^2 - 1)P)''$ est un élément de E .

2. $\phi(1) = (X^2 - 1)'' = (2X)' = 2$. $\phi(X) = ((X^2 - 1)X)'' = (X^3 - X)'' = (3X^2 - 1)' = 6X$.

$\phi(1) = 2$ et $\phi(X) = 6X$.

3. D'après Q1, ϕ est une application de E dans E .

Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de E .

$\phi(\lambda P + Q) = ((X^2 - 1)(\lambda P + Q))'' = (\lambda(X^2 - 1)P + (X^2 - 1)Q)'' = \lambda((X^2 - 1)P)'' + ((X^2 - 1)Q)''$
par linéarité de la dérivation. Ainsi $\phi(\lambda P + Q) = \lambda\phi(P) + \phi(Q)$.

Finalement ϕ est une application linéaire de E dans E .

ϕ est un endomorphisme de E .

4. Soit k un élément de $\llbracket 2, n \rrbracket$.

$\phi(X^k) = ((X^2 - 1)X^k)'' = (X^{k+2} - X^k)'' = ((k+2)X^{k+1} - kX^{k-1})' = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$.

$\phi(1) = 2$, $\phi(X) = 6X$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\phi(X^k) = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$.

La matrice A de ϕ dans \mathcal{B} est
$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$
 où : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = (k+2)(k+1)$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $b_k = -k(k-1)$.

Si $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}$ on a encore :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, a_{i,j} = \begin{cases} (j+1)j & \text{si } i = j \\ -(j-1)(j-2) & \text{si } i = j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. a. A est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donc l'ensemble de ses valeurs propres est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Ainsi $\text{Sp } A = \{(i+1)i; i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket\}$ ou $\text{Sp } A = \{(k+2)(k+1); k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Posons $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_k = (k+2)(k+1)$. $\text{Sp } \phi = \text{Sp } A = \{\lambda_k; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k - \lambda_{k-1} = (k+2)(k+1) - (k+1)k = 2(k+1) > 0$. Alors $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

ϕ admet $n+1$ valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ où, pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_k = (k+2)(k+1)$.

b. $0 < 2 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ donc 0 n'est pas valeur propre de A . Ainsi A est inversible ce qui permet de dire que :

ϕ est bijectif.

c. ϕ est un endomorphisme de E ayant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes et E est de dimension $n+1$. Ainsi :

ϕ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

6. k est un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$ et P est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k = (k+2)(k+1)$.

a. Notons r le degré de P et α_r le coefficient de X^r dans P . $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\alpha_r \neq 0$.

Le terme de plus haut degré de $(X^2 - 1)P$ est $\alpha_r X^{r+2}$, donc le terme de plus haut degré de $\phi(P)$ est $(r+2)(r+1)\alpha_r X^r$, c'est à dire $\lambda_r \alpha_r X^r$.

Or $\phi(P) = \lambda_k P$ et le terme de plus haut degré de $\lambda_k P$ est $\lambda_k \alpha_r X^r$ ($\lambda_k \neq 0$).

Ainsi $\lambda_r \alpha_r = \lambda_k \alpha_r$. α_r n'étant pas nul : $\lambda_r = \lambda_k$. Or $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ donc nécessairement $r = k$.

Si k appartient à $\llbracket 0, n \rrbracket$ et si P est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k alors P est de degré k .

b. $\lambda_k P = \phi(P) = ((X^2 - 1)P)'' = 2P + 2(2X)P' + (X^2 - 1)P''$ d'après la formule de Leibniz.

Alors $\lambda_k P(-X) = 2P(-X) + 2(2(-X))P'(-X) + (X^2 - 1)P''(-X)$.

Ainsi $\lambda_k P(-X) = 2P(-X) + 2(2X)(-P'(-X)) + (X^2 - 1)P''(-X)$ (\star).

On a aussi $\phi(Q) = ((X^2 - 1)Q)'' = 2Q + 2(2X)Q' + (X^2 - 1)Q''$.

Mais comme $Q(X) = P(-X)$, on a : $Q'(X) = -P'(-X)$ et $Q''(X) = P''(-X)$.

Alors $\phi(Q) = 2P(-X) + 2(2X)(-P'(-X)) + (X^2 - 1)P''(-X) = \lambda_k P(-X)$ grace à (\star).

Finalement $\phi(Q) = \lambda_k Q$; or P étant un vecteur propre de ϕ , P n'est pas le polynôme nul et il en est alors de même pour Q . Par conséquent Q est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .

Si k appartient à $\llbracket 0, n \rrbracket$ et si P est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k alors le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est également un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .

7. Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$ et U_k un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .

U_k est de degré k . Notons u_k le coefficient de X^k dans U_k et posons $V_k = \frac{1}{u_k} U_k$.

Alors V_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et V_k est encore un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .

Notons que V_k engendre le sous-espace propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k (car celui-ci est de dimension 1... et V_k n'est pas le polynôme nul).

Dès lors montrons par "analyse-synthèse" qu'il existe une unique base (P_0, P_1, \dots, P_n) de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

• Analyse Supposons que (P_0, P_1, \dots, P_n) soit solution du problème. Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$.

P_k est un vecteur propre de ϕ et P_k est de degré k . Donc, d'après Q6 a, P_k est nécessairement un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .

Alors il existe un réel α tel que $P_k = \alpha V_k$. Or P_k et V_k sont deux polynômes de degré k et de coefficient dominant 1. Ainsi $\alpha = 1$ et $P_k = V_k$.

Par conséquent si (P_0, P_1, \dots, P_n) est solution du problème : $(P_0, P_1, \dots, P_n) = (V_0, V_1, \dots, V_n)$.

D'où l'unicité de la solution.

• Synthèse Posons $(P_0, P_1, \dots, P_n) = (V_0, V_1, \dots, V_n)$ et montrons que (P_0, P_1, \dots, P_n) est solution du problème.

Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Comme $P_k = V_k$, P_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et P_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k . Notons également que P_k engendre le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k .

D'après Q6 b, $P_k(-X)$ est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .

Ainsi il existe un réel β tel que $P_k(-X) = \beta P_k$. Rappelons que P_k est de degré k et de coefficient dominant égal à 1. Ainsi $P_k(-X)$ est de degré k et de coefficient dominant égal à $(-1)^k$. Par conséquent $\beta = (-1)^k$.

Finalement, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$ et P_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .

Ne reste plus qu'à montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E . Il suffit pour cela de montrer que cette famille est libre car c'est une famille d'éléments de E de cardinal $n + 1$ qui est la dimension de E .

(P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes donc cette famille est libre. Ce que l'on peut confirmer en remarquant que c'est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.

Ceci achève de montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est solution du problème.

Il existe une unique base (P_0, P_1, \dots, P_n) de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

Donc $P_k(-X) = P_k(X)$ si k est pair et $P_k(-X) = -P_k(X)$ si k est impair. Ainsi :

pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, P_k a la parité de k .

8. P_0 est de degré 0 et son coefficient dominant est 1, donc $P_0 = 1$. P_1 est impair, de degré 1 et son coefficient dominant est 1, donc $P_1 = X$.

P_2 est pair, de degré 2 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel a tel que $P_2 = X^2 + a$.

$$\phi(P_2) = ((X^2 - 1)P_2)'' = ((X^2 - 1)(X^2 + a))'' = (X^4 + (a - 1)X^2 - a)'' = 12X^2 + 2(a - 1).$$

Or $\phi(P_2) = \lambda_2 P_2 = 12(X^2 + a)$ donc $12X^2 + 2(a - 1) = 12X^2 + 12a$ et ainsi $2a - 2 = 12a$.

Finalement $a = -\frac{1}{5}$ et $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$.

P_3 est impair, de degré 3 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel b tel que $P_3 = X^3 + bX$.

$$\phi(P_3) = ((X^2 - 1)P_3)'' = ((X^2 - 1)(X^3 + bX))'' = (X^5 + (b - 1)X^3 - bX)'' = 20X^3 + 6(b - 1)X.$$

Or $\phi(P_3) = \lambda_3 P_3 = 20(X^3 + bX)$ donc $20X^3 + 6(b - 1)X = 20X^3 + 20bX$ et ainsi $6b - 6 = 20b$.

Finalement $b = -\frac{3}{7}$ et $P_3 = X^3 - \frac{3}{7}X$.

$P_0 = 1$	$P_1 = X$	$P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$	$P_3 = X^3 - \frac{3}{7}X$
-----------	-----------	---------------------------	----------------------------

Partie II Un produit scalaire sur E .

1. • Soient P et Q deux éléments de E .

$x \rightarrow (1-x^2)P(x)Q(x)$ est continue sur $[-1, 1]$ donc $\int_{-1}^1 (1-x^2)P(x)Q(x) dx$ existe.

Ainsi $(\cdot | \cdot) : (P, Q) \rightarrow (P | Q)$ est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

• Soient P, Q, R trois éléments de E et λ est un réel.

$$(\lambda P + Q | R) = \int_{-1}^1 (1-x^2)(\lambda P + Q)(x)R(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)(\lambda P(x) + Q(x))R(x) dx.$$

$$(\lambda P + Q | R) = \int_{-1}^1 (\lambda(1-x^2)P(x)R(x) + (1-x^2)Q(x)R(x)) dx.$$

$$(\lambda P + Q | R) = \lambda \int_{-1}^1 (1-x^2)P(x)R(x) dx + \int_{-1}^1 (1-x^2)Q(x)R(x) dx = \lambda(P | R) + (Q | R).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q, R) \in E^3, (\lambda P + Q | R) = \lambda(P | R) + (Q | R)$. $(\cdot | \cdot)$ est linéaire à gauche.

• Soient P et Q deux éléments de E .

$$(P | Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)P(x)Q(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)Q(x)P(x) dx = (Q | P).$$

$\forall (P, Q) \in E^2, (P | Q) = (Q | P)$. $(\cdot | \cdot)$ est symétrique.

• Soit P un élément de E .

$$\forall x \in [-1, 1], (1-x^2)P(x)P(x) \geq 0 \text{ et } -1 \leq 1 \text{ donc } (P | P) = \int_{-1}^1 (1-x^2)P(x)P(x) dx \geq 0.$$

$\forall P \in E, (P | P) \geq 0$. $(\cdot | \cdot)$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $(P | P) = 0$.

$$x \rightarrow (1-x^2)P(x)P(x) \text{ est continue et positive sur } [-1, 1], \int_{-1}^1 (1-x^2)P(x)P(x) dx = 0 \text{ et } -1 \neq 1.$$

Alors $\forall x \in [-1, 1], (1-x^2)P(x)P(x) = 0$. Ainsi $\forall x \in]-1, 1[, (P(x))^2 = 0$. Donc $\forall x \in]-1, 1[, P(x) = 0$.

Le polynôme P admet alors une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

$\forall P \in E, (P | P) = 0 \Rightarrow P = 0_E$. $(\cdot | \cdot)$ est définie.

Les cinq points précédents montrent que :

$$(P, Q) \rightarrow (P | Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2) P(x) Q(x) dx \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

2. a. Soient P et Q deux éléments de E .

Posons $\hat{P} = ((X^2 - 1)P)'$, $\hat{Q} = ((X^2 - 1)Q)'$, $\forall t \in [-1, 1]$, $u(t) = \hat{P}(t)$ et $v(t) = (1 - t^2)Q(t)$.

Notons que : $\forall t \in [-1, 1]$, $v(t) = -(t^2 - 1)Q(t)$.

u et v sont de classe C^1 sur $[-1, 1]$. $\forall t \in [-1, 1]$, $u'(t) = (\hat{P})'(t) = \phi(P)(t)$ et $v'(t) = -\hat{Q}(t)$.

En intégrant par parties on obtient :

$$(\phi(P) | Q) = \int_{-1}^1 (1-t^2) \phi(P)(t) Q(t) dt = \int_{-1}^1 u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(t) v'(t) dt.$$

Remarquons que $v(1) = v(-1) = 0$; il vient alors : $(\phi(P) | Q) = - \int_{-1}^1 u(t) v'(t) dt = \int_{-1}^1 \hat{P}(t) \hat{Q}(t) dt$.

De même $(\phi(Q) | P) = \int_{-1}^1 \hat{Q}(t) \hat{P}(t) dt$. Alors :

$$(\phi(P) | Q) = \int_{-1}^1 \hat{P}(t) \hat{Q}(t) dt = \int_{-1}^1 \hat{Q}(t) \hat{P}(t) dt = (\phi(Q) | P) = (P | \phi(Q)). \text{ Donc : } (\phi(P) | Q) = (P | \phi(Q)).$$

ϕ est un endomorphisme symétrique de E .

b. ϕ est un endomorphisme symétrique de E donc ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi deux vecteurs propres de ϕ associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

La base (P_0, P_1, \dots, P_n) de E est alors constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux ; c'est donc une base orthogonale de E .

(P_0, P_1, \dots, P_n) est une base orthogonale de E .

3. Dans toute cette question j est un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a. $(P_0, P_1, \dots, P_{j-1})$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. Cette famille est libre (comme sous-famille de la base (P_0, P_1, \dots, P_n)) et elle a pour cardinal j qui est la dimension de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$; $(P_0, P_1, \dots, P_{j-1})$ est donc une base de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Or P_j est orthogonal aux éléments de cette base de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$ donc P_j est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j - 1$, on a : $(S | P_j) = 0$.

b. 1 est un polynôme de degré inférieur à $j - 1$ donc $(1 | P_j) = 0$. Ainsi $\int_{-1}^1 (1 - x^2) P_j(x) dx = 0$.

Supposons que P_j garde un signe constant sur $] - 1, 1[$. Il en est alors de même pour $x \rightarrow (1 - x^2) P_j(x)$.

$x \rightarrow (1 - x^2) P_j(x)$ étant continue sur $[-1, 1]$ on peut alors dire que $x \rightarrow (1 - x^2) P_j(x)$ garde un signe constant sur $[-1, 1]$.

Alors $x \rightarrow (1 - x^2) P_j(x)$ est continue et garde un signe constant sur $[-1, 1]$, $\int_{-1}^1 (1 - x^2) P_j(x) dx = 0$ et $-1 \neq 1$.

Ainsi $\forall x \in [-1, 1]$, $(1 - x^2) P_j(x) = 0$ donc $\forall x \in] - 1, 1[$, $P_j(x) = 0$.

Cela donne à P_j une infinité de racines ce qui est impossible car P_j est de degré j .

P_j ne garde pas un signe constant sur $] - 1, 1[$.

c. P_j ne garde pas un signe constant sur $] - 1, 1[$ donc il existe deux éléments distincts t_1 et t_2 de $] - 1, 1[$ tels que $P_j(t_1) P_j(t_2) < 0$.

Or P_j est continue sur $] - 1, 1[$ donc P_j admet au moins une racine dans $] - 1, 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Si toutes les racines de P_j appartenant à $] - 1, 1[$ sont d'ordre de multiplicité pair alors P_j garde un signe constant sur $] - 1, 1[$! Finalement :

P_j admet au moins, dans l'intervalle $] - 1, 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. Dans toute cette question j est un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Nous supposons évidemment que x_1, x_2, \dots, x_m sont deux à deux distincts...

a. P_j est de degré j donc P_j a au plus j racines. Ainsi :

$$m \leq j.$$

b. Observons que $S_m P_j$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ dont les racines appartenant à $] - 1, 1[$ sont d'ordre de multiplicité pair. Ainsi :

Le polynôme $S_m P_j$ garde un signe constant sur $] - 1, 1[$.

c. Supposons que m est strictement inférieur à j .

La question **3. a.** donne $(S_m | P_j) = 0$ ou $\int_{-1}^1 (1 - x^2) S_m(x) P_j(x) dx = 0$.

$x \rightarrow (1 - x^2) S_m(x) P_j(x)$ garde un signe constant sur $] - 1, 1[$ et est nulle en -1 et 1 .

Alors $x \rightarrow (1 - x^2) S_m(x) P_j(x)$ est continue et garde un signe constant sur $[-1, 1]$.

De plus $\int_{-1}^1 (1 - x^2) S_m(x) P_j(x) dx = 0$ et $-1 \neq 1$. Par conséquent $x \rightarrow (1 - x^2) S_m(x) P_j(x)$ est nulle sur $[-1, 1]$.

Alors le polynôme $(1 - X^2) S_m P_j$ admet une infinité de racines c'est donc le polynôme nul.

$(1 - X^2) S_m P_j = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc ou $(1 - X^2) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $S_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $P_j = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ceci n'est pas donc :

$$\boxed{m = j.}$$

d. Ce qui précède montre que P_j admet au moins j racines distinctes dans $] - 1, 1[$ et nous avons vu que P_j est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré j .

Alors P_j ne peut pas avoir d'autres racines et ces racines sont nécessairement d'ordre 1. Finalement :

$$\boxed{P_j \text{ admet } j \text{ racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle }] - 1, 1[.}$$
