

PROBLÈME 1

Partie I : Interpolation polynomiale

1. • φ est une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R}^n .

• Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\varphi(\lambda P + Q) = \left((\lambda P + Q)(a_1), (\lambda P + Q)(a_2), \dots, (\lambda P + Q)(a_n) \right).$$

$$\varphi(\lambda P + Q) = \left(\lambda P(a_1) + Q(a_1), \lambda P(a_2) + Q(a_2), \dots, \lambda P(a_n) + Q(a_n) \right).$$

$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)) + (Q(a_1), Q(a_2), \dots, Q(a_n)) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X], \varphi(\lambda P + Q) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$. φ est linéaire.

• Soit P un élément de $\text{Ker } \varphi$. $(P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Ainsi $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = 0$. Donc a_1, a_2, \dots, a_n sont n zéros distincts du polynôme P qui est de degré au plus $n - 1$. Alors P est le polynôme nul.

Cela suffit pour dire que $\text{Ker } \varphi = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$ donc que φ est injective.

φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R}^n . Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et \mathbb{R}^n ont **même dimension finie** n , φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur \mathbb{R}^n .

φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur \mathbb{R}^n .

2. Soit (b_1, b_2, \dots, b_n) un élément de \mathbb{R}^n . Soit P un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i \right) \iff (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff \varphi(P) = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i \right) \iff P = \varphi^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_n). \text{ Plus de doute :}$$

il existe un élément P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et un seul tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$.

3. Notons que 0, 1, 2 et 3 sont quatre réels deux à deux distincts ! Alors il existe un unique élément P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_0(0) = 1, P_0(1) = 3, P_0(2) = 11$ et $P_0(3) = 31$.

Il existe quatre réels a, b, c, d tels que $P_0 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Notons qu'il est nullement obligatoire de raisonner par équivalences pour trouver a, b, c et d .

$$\text{Les hypothèses donnent : } \begin{cases} 1 = P_0(0) = d \\ 3 = P_0(1) = a + b + c + d \\ 11 = P_0(2) = 8a + 4b + 2c + d \\ 31 = P_0(3) = 27a + 9b + 3c + d \end{cases} .$$

$$\text{Alors } \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 10 \end{cases} . \text{ Ainsi } \begin{cases} d = 1 \\ c = 2 - a - b \\ 3a + b = 3 \\ 8a + 2b = 8 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} d = 1 \\ c = 2 - a - b \\ 3a + b = 3 \\ 4a + b = 4 \end{cases} .$$

En retranchant les deux dernières lignes il vient rapidement $a = 1$. Ce qui donne $b = 0$ et $c = 1$.

Finalement $a = 1, b = 0, c = 1$ et $d = 1$. Donc :

L'unique élément P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_0(0) = 1, P_0(1) = 3, P_0(2) = 11$ et $P_0(3) = 31$ est $X^3 + X + 1$.

Partie II : Polynômes spéciaux

1. P_0 est un élément de $\mathbb{R}[X]$. De plus : $\forall x \in]0, +\infty[, (P_0(x) = x^3 + x + 1 > 0 \text{ et } P_0'(x) = 3x^2 + 1 > 0)$.

Alors :

$X^3 + X + 1$ est un élément de E .

2. Soit α un réel strictement positif. Soient P et Q deux éléments de E .

Notons que $\alpha P, P + Q$ et PQ sont des éléments de $\mathbb{R}[X]$ car P et Q sont des éléments de $\mathbb{R}[X]$ et α est un réel.

Soit x un élément de $]0, +\infty[$. $P(x) > 0, Q(x) > 0, P'(x) > 0, Q'(x) > 0$ et $\alpha > 0$.

Alors $(\alpha P)(x) = \alpha P(x) > 0, (\alpha P)'(x) = \alpha P'(x) > 0, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x) > 0, (P + Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0, (PQ)(x) = P(x)Q(x) > 0$ et $(PQ)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0$. Ceci étant vrai pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, on peut alors affirmer que $\alpha P, P + Q, PQ$ sont des éléments de E .

E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication.

P_0 appartient à E . Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $P_0(x) > 0$ donc $\forall x \in]0, +\infty[$, $(-P_0)(x) < 0$. Ainsi $-P_0$ n'appartient pas à E . Ce qui permet de dire que :

E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit P un élément de E . P_1 est la primitive de P sur \mathbb{R} qui prend la valeur 0 en 0 donc P_1 est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

On a déjà : $\forall x \in]0, +\infty[$, $P_1'(x) = P(x) > 0$.

Notons alors que P_1 est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Ceci suffit pour dire que P_1 est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $P_1(x) > P_1(0) = 0$.

Ceci achève de montrer que P_1 est un élément de E .

Si P est un élément de E , l'application P_1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = \int_0^x P(t) dt$ est également un élément de E .

4. Soit P un élément de E . P est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que P est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Ce qui suffit très largement pour dire que $\forall x \in]0, +\infty[$, $P(x) \geq P(0)$.

Si P est dans E , $\forall x \in]0, +\infty[$, $P(x) \geq P(0)$.

5. Soit P un élément de E .

- \tilde{P} est application continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $[P(0), +\infty[$ car P est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- P n'est pas un polynôme constant car P' n'est pas le polynôme nul puisque $\forall x \in]0, +\infty[$, $P'(x) > 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$. Comme P est strictement positif sur $]0, +\infty[$, nécessairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{P}(x) = +\infty$.

Les deux points précédents montrent que \tilde{P} est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $[P(0), +\infty[$.

Si P est un élément de E , \tilde{P} est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $[P(0), +\infty[$.

6. Soit P est un élément de E de degré au moins deux.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $\tilde{P}'(x) = P'(x) > 0$. Ceci permet de dire que \tilde{P}^{-1} est au moins dérivable sur $]P(0), +\infty[$.

De plus $\forall x \in]P(0), +\infty[$, $(\tilde{P}^{-1})'(x) = \frac{1}{\tilde{P}'(\tilde{P}^{-1}(x))}$.

Or \tilde{P} est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[P(0), +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{P}(x) = +\infty$
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{P}^{-1}(x) = +\infty$.

P' est un polynôme de degré au moins 1 strictement positif sur $]0, +\infty[$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} P'(x) = +\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{P}'(x) = +\infty$ et par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{P}'(\tilde{P}^{-1}(x)) = +\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tilde{P}^{-1})'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tilde{P}'(\tilde{P}^{-1}(x))} = 0$.

Supposons que \tilde{P}^{-1} est une application polynômiale. \tilde{P}^{-1} est alors dérivable sur $[P(0), +\infty[$ et sa dérivée est également une application polynômiale. Alors comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tilde{P}^{-1})'(x) = 0$ nécessairement $(\tilde{P}^{-1})'$ est constante et même nulle sur $[P(0), +\infty[$.

Donc \tilde{P}^{-1} est constante sur $[P(0), +\infty[$ ce qui contredit le caractère bijectif de \tilde{P}^{-1} .

Donc \tilde{P}^{-1} n'est pas une application polynômiale.

Si P est un élément de E de degré au moins 2, l'application réciproque \tilde{P}^{-1} de \tilde{P} n'est pas une application polynômiale.

Partie III : Matrices symétriques positives

1. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donc à coefficients réels!). Le cours montre alors que :

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a. Supposons que A soit dans \mathcal{S}_n^+ . Soit λ une valeur propre de A . Il existe un élément U non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU = \lambda U$.

Alors ${}^tUAU = {}^tU(\lambda U) = \lambda {}^tUU = \lambda \|U\|^2$. tUAU est un réel positif ou nul car A appartient à \mathcal{S}_n^+ et $\|U\|^2$ est un réel strictement positif car U n'est pas nulle. Dans ces conditions λ est un réel positif ou nul. $\lambda \in [0, +\infty[$.

Donc toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$.

Si A appartient à \mathcal{S}_n^+ alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$.

b. Réciproquement supposons que toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormée (U_1, U_2, \dots, U_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ notons α_i la valeur propre de A associée au vecteur propre U_i .

Par hypothèse $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i \geq 0$.

Soit U un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées (t_1, t_2, \dots, t_n) dans la base (U_1, U_2, \dots, U_n) .

$$U = \sum_{i=1}^n t_i U_i \text{ et } AU = \sum_{i=1}^n t_i AU_i = \sum_{i=1}^n t_i \alpha_i U_i.$$

Comme (U_1, U_2, \dots, U_n) est une base orthonormée : ${}^t UAU = \langle U, AU \rangle = \sum_{i=1}^n (t_i t_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^n (t_i^2 \alpha_i)$.

Or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_i^2 \geq 0$ et $\alpha_i \geq 0$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_i^2 \alpha_i \geq 0$. Ainsi ${}^t UAU = \sum_{i=1}^n (t_i^2 \alpha_i) \geq 0$.

A est alors une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t UAU \geq 0$ donc A appartient à \mathcal{S}_n^+ .

Si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$ alors A est dans \mathcal{S}_n^+ .

Partie IV : Matrices symétriques positives solution d'une équation polynomiale spéciale

1. a. P est de degré $n - 1$ donc il existe $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ dans \mathbb{R}^n tel que $P = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ et $c_{n-1} \neq 0$.

$$SA = SP(S) = S \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S^{k+1} \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S^k \right) S = P(S)S = AS. \text{ Donc } SA = AS.$$

$A = QDQ^{-1}$ donc $D = Q^{-1}AQ$. Rappelons que $\Delta = Q^{-1}SQ$.

$$\text{Alors } \Delta D = Q^{-1}SQ Q^{-1}AQ = Q^{-1}SAQ = Q^{-1}ASQ = Q^{-1}AQ Q^{-1}SQ = D\Delta.$$

$$SA = AS \text{ et } \Delta D = D\Delta.$$

b. Posons $\Delta = (\delta_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$. Notons que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, d_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

$$\text{Alors } \Delta D = \left(\sum_{k=1}^n \delta_{i,k} d_{k,j} \right) \text{ et } D\Delta = \left(\sum_{k=1}^n d_{i,k} \delta_{k,j} \right).$$

En tenant compte de ce qui précède on a encore $\Delta D = (\delta_{i,j} \lambda_j)$ et $D\Delta = (\lambda_i \delta_{i,j})$.

Comme $\Delta D = D\Delta : \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \delta_{i,j} \lambda_j = \lambda_i \delta_{i,j}$.

Soient i et j deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $\delta_{i,j} \lambda_j = \lambda_i \delta_{i,j}$ donc $(\lambda_j - \lambda_i) \delta_{i,j} = 0$.

i et j étant distincts il en est de même pour λ_i et λ_j . Donc $\lambda_j - \lambda_i$ n'est pas nul. Alors $\delta_{i,j}$ est nul.

$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \delta_{i,j} = 0$ donc Δ est diagonale.

S appartient à \mathcal{S}_n^+ donc ses valeurs propres sont des éléments de $[0, +\infty[$. Or S et Δ sont semblables donc ont les mêmes valeurs propres. Par conséquent les valeurs propres de Δ sont des éléments de $[0, +\infty[$.

Comme Δ est diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Alors les éléments diagonaux de Δ sont des réels positifs ou nuls.

Δ est diagonale et ses éléments diagonaux sont tous positifs ou nuls.

Avant de passer à la question suivantes poussons l'avantage.

$$P(\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Delta^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (Q^{-1}SQ)^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k Q^{-1}S^kQ = Q^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k S^k \right) Q.$$

$$P(\Delta) = Q^{-1}P(S)Q = Q^{-1}AQ = D. \text{ Alors :}$$

$$\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D = P(\Delta) = P(\text{Diag}(\delta_{1,1}, \delta_{2,2}, \dots, \delta_{n,n})) = \text{Diag}(P(\delta_{1,1}), P(\delta_{2,2}), \dots, P(\delta_{n,n})).$$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = P(\delta_{i,i})$. Rappelons que P est dans E et que $\delta_{1,1}, \delta_{2,2}, \dots, \delta_{n,n}$ sont des réels positifs.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = P(\delta_{i,i}) = \tilde{P}(\delta_{i,i})$. Ce qui donne $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_{i,i} = \tilde{P}^{-1}(\lambda_i)$.

$$\text{Alors } \Delta = \text{Diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)).$$

$$\text{Or } S = Q\Delta Q^{-1} \text{ et } \boxed{\text{donc } S = Q \text{Diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)) Q^{-1}.$$

2. Ici le concepteur ne nous a pas fait de cadeau car il nous oblige à montrer que le problème admet une solution et une seule (normal et simple) et qu'en plus la solution s'écrit $Q\Delta Q^{-1}$ où Δ est diagonale (pas de problème) et où Q est la matrice qu'il a fixé au départ, non ? Le dernier point coince un peu...

$$\text{Posons } \Delta_0 = \text{Diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)) \text{ et } S_0 = Q\Delta_0 Q^{-1}.$$

La question précédente montre que si S est solution : $S = S_0$. Cela montre que l'équation proposée admet au plus une solution et que s'il existe une solution cela ne peut être que S_0 .

On s'apprête donc gentiment à montrer que S_0 est solution. Pas de difficulté pour montrer que $P(S_0) = A$ et que les valeurs propres de S_0 sont positives ou nulles. C'est moins facile de montrer que S_0 est symétrique... sauf si Q est orthogonale (ce qui n'est pas dans le texte). Rusons...

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ considérons un vecteur propre unitaire V_i associé à la valeur propre λ_i .

Les sous-espaces propres de A étant deux à deux orthogonaux, (V_1, V_2, \dots, V_n) est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Mieux c'est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car V_1, V_2, \dots, V_n sont unitaires.

(V_1, V_2, \dots, V_n) est alors une famille orthonormée donc une famille libre de cardinal n de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n , c'est donc une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Mieux (V_1, V_2, \dots, V_n) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit alors Q_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base (V_1, V_2, \dots, V_n) . Q_1 est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

De plus $Q_1^{-1} A Q_1 = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. $A = Q_1 \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q_1^{-1}$.

Posons alors $S_1 = Q_1 \Delta_0 Q_1^{-1} = Q_1 \Delta_0^t Q_1$ et montrons que S_1 est solution.

- ${}^t S_1 = {}^t (Q_1 \Delta_0^t Q_1) = {}^t ({}^t Q_1)^t \Delta_0^t Q_1 = Q_1 \Delta_0^t Q_1 = S_1$ car Δ_0 est diagonale. Donc S_1 est symétrique.

S_1 et Δ_0 sont semblables donc ont mêmes valeurs propres. Or $\Delta_0 = \text{Diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n))$ donc les valeurs propres de Δ_0 sont $\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)$. Comme \tilde{P}^{-1} est une application de $[P(0), +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, les valeurs propres de Δ_0 et donc de S_1 sont des éléments de $[0, +\infty[$.

Ceci achève de montrer que S_1 est dans \mathcal{S}_n^+ .

- Montrons que $P(S_1) = A$.

$$P(S_1) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k S_1^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (Q_1 \Delta_0 Q_1^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k Q_1 \Delta_0^k Q_1^{-1} = Q_1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \Delta_0^k \right) Q_1^{-1}.$$

$P(S_1) = Q_1 P(\Delta_0) Q_1^{-1}$. Calculons $P(\Delta_0)$.

$$P(\Delta_0) = P \left(\text{Diag} \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n) \right) \right).$$

$$P(\Delta_0) = \text{Diag} \left(P \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1) \right), P \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_2) \right), \dots, P \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_n) \right) \right).$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tilde{P}^{-1}(\lambda_i) \in [0, +\infty[\text{ donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_i) \right) = \tilde{P} \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_i) \right) = \lambda_i.$$

Ainsi $P(\Delta_0) = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $P(S_1) = Q_1 P(\Delta_0) Q_1^{-1} = Q_1 \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q_1^{-1} = A$.

S_1 appartient à \mathcal{S}_n^+ et $P(S_1) = A$ donc S_1 est solution. Finalement :

L'équation $S \in \mathcal{S}_n^+$ et $P(S) = A$ admet une solution et une seule.

Nous avons vu que S_1 est solution et que si S est solution :

$$S = Q \text{Diag} \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n) \right) Q^{-1}.$$

$$\text{Donc } S_1 = Q \text{Diag} \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n) \right) Q^{-1}.$$

Ainsi $Q \text{Diag} \left(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n) \right) Q^{-1}$ est la solution. Cela permet alors de dire que :

Si Q est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)Q^{-1}$, la solution de l'équation $S \in \mathcal{S}_n^+$ et $P(S) = A$ est $Q\Delta_0Q^{-1}$ où Δ_0 est la matrice diagonale $\text{Diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n))$.

3. a. $P = X^3 + X + 1$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

De plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $P(x) = x^3 + x + 1 > 0$ et $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Alors :

$$P = X^3 + X + 1 \text{ est un élément de } E.$$

b. Soit λ un réel et soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$AU = \lambda U \iff \begin{cases} 2x - y = \lambda x \\ -x + 2y = \lambda y \\ 21z + 10t = \lambda z \\ 10z + 21t = \lambda t \end{cases} \iff \begin{cases} y = (2 - \lambda)x \\ -x + (2 - \lambda)y = 0 \\ t = \frac{1}{10}(\lambda - 21)z \\ 10z + (21 - \lambda)t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (2 - \lambda)x \\ ((2 - \lambda)^2 - 1)x = 0 \\ t = \frac{1}{10}(\lambda - 21)z \\ \frac{1}{10}(10^2 - (\lambda - 21)^2)z = 0 \end{cases}.$$

$$AU = \lambda U \iff \begin{cases} (1 - \lambda)(3 - \lambda)x = 0 \\ y = (2 - \lambda)x \\ (\lambda - 11)(31 - \lambda)z = 0 \\ t = \frac{1}{10}(\lambda - 21)z \end{cases}.$$

Si λ n'appartient pas à $\{1, 3, 11, 31\}$, $AU = \lambda U \iff x = y = z = t = 0 \iff U = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda = 1$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite

vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 3$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la

droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 11$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = -z \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la

droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 31$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = z \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite

vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont 1, 3, 11 et 31.

Remarque Nous aurions pu remarquer que A est la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} & A_2 \end{pmatrix}$ avec

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$ et utiliser que $\text{Sp } A = \text{Sp } A_1 \cup \text{Sp } A_2 \dots$

A est clairement symétrique et ses valeurs propres sont des éléments de $[0, +\infty[$ donc :

A appartient à \mathcal{S}_4^+ .

c. $\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2}$.

Posons $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posons encore $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 11$ et $\lambda_4 = 31$.

Pour tout i dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, (V_i) est une base orthonormée de $\text{SEP}(A, \lambda_i)$. De plus $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^4 \text{SEP}(A, \lambda_i)$ et, $\text{SEP}(A, \lambda_1)$, $\text{SEP}(A, \lambda_2)$, $\text{SEP}(A, \lambda_3)$, $\text{SEP}(A, \lambda_4)$ sont deux à deux orthogonaux. Alors (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, 3, 11 ; 31.

Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base (V_1, V_2, V_3, V_4) . Q est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée et $Q^{-1}AQ$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 3, 11, 31)$.

Notons que $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $A = QDQ^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 3, 11, 31)$.

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $A = QDQ^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 3, 11, 31)$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

d. Dans ces conditions et d'après ce qui précède, l'équation $S \in \mathcal{S}_1^+$ et $P(S) = A$ admet une solution et une seule qui est $S_0 = Q \text{Diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \tilde{P}^{-1}(\lambda_2), \tilde{P}^{-1}(\lambda_3), \tilde{P}^{-1}(\lambda_4))Q^{-1}$.

Notons que $S_0 = Q \text{Diag}(\tilde{P}^{-1}(1), \tilde{P}^{-1}(3), \tilde{P}^{-1}(11), \tilde{P}^{-1}(31))Q^{-1}$.

Or $P = X^3 + X + 1 = P_0$. Donc **I Q3.** donne $P(0) = 1 = \lambda_1$, $P(1) = 3 = \lambda_2$, $P(2) = 11 = \lambda_3$ et $P(3) = 31 = \lambda_4$.

Comme P est dans E et 0, 1, 2, 3 sont des éléments de $[0, +\infty[$: $\tilde{P}^{-1}(1) = 0$, $\tilde{P}^{-1}(3) = 1$, $\tilde{P}^{-1}(11) = 2$, $\tilde{P}^{-1}(31) = 3$.

Alors $S_0 = Q \text{Diag}(0, 1, 2, 3)Q^{-1} = Q \text{Diag}(0, 1, 2, 3)^t Q$.

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{Diag}(0, 1, 2, 3) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'équation $S \in \mathcal{S}_4^+$ et $P(S) = A$ admet une solution et une seule: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

PROBLÈME 2

Partie I : Formule de Stirling

1. $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} \cdot W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.}$$

2. a. Soit n un élément de \mathbb{N} . $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n t - \cos^{n+1} t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 - \cos t) \cos^n t) dt.$

$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], (1 - \cos t) \cos^n t \geq 0$ et $0 \leq \frac{\pi}{2}$ donc $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 - \cos t) \cos^n t) dt \geq 0$; $W_n \geq W_{n+1}.$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq W_{n+1}.$

$$\boxed{(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N} . $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^n t \geq 0$ et $0 \leq \frac{\pi}{2}$ donc $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt \geq 0.$

Supposons que W_n soit nulle. Alors $t \rightarrow \cos^n t$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'intégrale nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \neq \frac{\pi}{2}.$

Dans ces conditions $t \rightarrow \cos^n t$ est nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En fait il n'en est rien car $\cos^n 0 = 1!$

Donc W_n n'est pas nulle et $W_n \geq 0$. Ainsi $W_n > 0.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0.}$$

3. a. Soit n un élément de \mathbb{N} . Notons que $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t dt.$

Posons alors $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], u(t) = \sin t$ et $v(t) = \cos^{n+1} t.$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], u'(t) = \cos t$ et $v'(t) = -(n+1) \sin t \cos^n t.$

Ceci légitime l'intégration par parties qui suit.

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t dt = \left[\sin t \cos^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (-(n+1) \sin t \cos^n t) dt.$$

$$W_{n+2} = \sin \frac{\pi}{2} \cos^{n+1} \frac{\pi}{2} - \sin 0 \cos^{n+1} 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t dt.$$

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}.$$

Donc $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n.}$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_n W_{n+1} = (n+1) W_{n+1} W_n$.

Ainsi la suite $((n+1) W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) W_{n+1} W_n = (0+1) W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) W_{n+1} W_n = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}.}$$

4. a. La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2} W_n$ et $W_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$. Il vient alors par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ ainsi :

$$\boxed{W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n.}$$

$\frac{\pi}{2} = (n+1) W_{n+1} W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) (W_n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n (W_n)^2$. Alors $n W_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ donc $W_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.

Ainsi $W_n = |W_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

$$\boxed{W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout élément n de \mathbb{N} : $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

- $\frac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0} (0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1 \times 1} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0 = W_{2 \times 0}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N} et montrons la pour $n+1$.

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2n+2} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2(n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2(n+1))(2(n+1))2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Ceci achève la récurrence.

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

$$6. \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n \left[-\frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right].$$

Rappelons que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Donc $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

$$1 - \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ et } \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \text{ Par produit :}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} - \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$-\frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\text{Or } \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, a_n = n \left[-\frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right].$$

$$\text{Alors } a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et ainsi } a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{12n^2}$ est convergente et à termes positifs, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général a_n converge.

La série de terme général a_n converge.

7. Notons que pour tout élément de \mathbb{N}^* , A_n est strictement positif.

$$\text{Soit } n \text{ un élément de } \llbracket 2, +\infty \llbracket. \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1} e^{-(n-1)} \sqrt{n-1}}.$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n!} \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \frac{e^{-n}}{e^{-(n-1)}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{n} n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} e^{-1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

$$\ln A_n - \ln A_{n-1} = \ln \frac{A_n}{A_{n-1}} = \ln \left(e^{-1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}} \right) = -1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{n}{n-1}\right).$$

$$\ln A_n - \ln A_{n-1} = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{n-1}{n}\right) = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = a_n.$$

$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \ln A_n - \ln A_{n-1} = a_n.$

8. $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \ln A_n = \ln A_n - \ln A_1 + \ln A_1 = \sum_{k=2}^n (\ln A_k - \ln A_{k-1}) - 1$ (par "télescopage" et car $\ln A_1 = \ln e^{-1} = -1$).

$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $\ln A_n = \sum_{k=2}^n a_k - 1$. Or la série de terme général a_n converge donc la suite de terme général

$\sum_{k=2}^n a_k$ converge. Alors la suite $(\ln A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Notons ℓ' sa limite ($\ell' = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k - 1$).

De la continuité de la fonction exponentielle en ℓ' il résulte que la suite $(e^{\ln A_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{\ell'}$.

Alors la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{\ell'}$ qui est un réel strictement positif.

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et sa limite ℓ est strictement positive.

9. a. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ qui est un réel non nul donc $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

Alors $\frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$ donc $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

b. $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ d'après **4. b.** Donc $W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$ donc $(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}$.

$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$ donc $2^{2n} (n!)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{2n} \frac{1}{\ell^2} n^{2n} e^{-2n} n = \frac{1}{\ell^2} (2n)^{2n} e^{-2n} n$.

Alors $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\ell} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{\frac{1}{\ell^2} (2n)^{2n} e^{-2n} n}$. En simplifiant il vient : $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell \sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.

Donc $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi \ell}{\sqrt{2n}}$.

Or $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. Ainsi $\frac{\pi \ell}{\sqrt{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

Donc la suite de terme général $\frac{\frac{\pi \ell}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$ converge vers 1.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\frac{\pi \ell}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}} = \frac{\pi \ell}{\sqrt{2n}} \frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{\pi}} = \ell \sqrt{2\pi}$.

Donc la suite de terme général $\frac{\frac{\pi \ell}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$ est constante égale à $\ell \sqrt{2\pi}$ et converge vers 1. Alors $\ell \sqrt{2\pi} = 1$.

Donc $\frac{1}{\ell} = \sqrt{2\pi}$. Or $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$. Ainsi $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^n e^{-n} \sqrt{n}$ ou $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

1. • $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ sont positives ou nulles sur \mathbb{R} donc f_a est positive ou nulle sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ donc f_a est positive ou nulle sur \mathbb{R} .

• $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ sont continues sur \mathbb{R} donc f_a est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Alors f_a est au moins continue sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R} privé d'un nombre fini de points.

Remarque Observons que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_a(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ car $f_a(0) = 0$. Alors f_a est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que f_a est continue sur \mathbb{R} .

• f_a est nulle sur $] -\infty, 0]$ donc $\int_{-\infty}^0 f_a(t) dt$ converge et vaut 0.

La remarque précédente a montré que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_a(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ et que f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \int_0^x f_a(t) dt = \int_0^x \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right) = 1.$$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_a(t) dt = 1$. Donc $\int_0^{+\infty} f_a(t) dt$ converge et vaut 1.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t) dt$ converge et vaut 1.

Ceci achève de montrer que :

f_a est une densité de probabilité.

2. Notons F_a la fonction de répartition de X . $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = \int_{-\infty}^x f_a(t) dt$.

Comme f_a est nulle sur $] -\infty, 0]$, $\forall x \in] -\infty, 0]$, $F_a(x) = 0$.

Soit x un élément de $[0, +\infty[$. $F_a(x) = \int_{-\infty}^x f_a(t) dt = \int_0^x f_a(t) dt$.

Or nous avons vu plus haut que $\int_0^x f_a(t) dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ donc $F_a(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

La fonction de répartition F_a de X est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. g_a est une densité d'une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de paramètres 0 et a^2 .

$E(Y)$ existe et vaut 0 et $V(Y)$ existe et vaut a^2 . Alors $E(Y^2)$ existe et vaut a^2 .

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_a(t) dt$ converge et vaut a^2 .

Comme $t \rightarrow t^2 g_a(t)$ est paire sur \mathbb{R} , $\int_0^{+\infty} t^2 g_a(t) dt$ converge et vaut $\frac{a^2}{2}$.

Observons alors que $\forall t \in [0, +\infty[$, $t f_a(t) = \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} t^2 g_a(t)$.

Alors $\int_0^{+\infty} t f_a(t) dt$ existe et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{a} \int_0^{+\infty} t^2 g_a(t) dt$ ou $\frac{\sqrt{2\pi}}{a} \frac{a^2}{2}$ soit encore $\sqrt{\frac{\pi}{2}} a$.

Notons que $\int_{-\infty}^0 t f_a(t) dt$ existe et vaut 0. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_a(t) dt$ existe et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}} a$. Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } \sqrt{\frac{\pi}{2}} a.}$$

4. D'abord $\int_{-\infty}^0 t^2 f_a(t) dt$ converge et vaut 0.

$t \rightarrow t^2 f_a(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. $\forall t \in [0, +\infty[$, $t^2 f_a(t) = t^2 \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^2$ et $v(t) = -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. Ceci légitime l'intégration par parties suivante.

Soit x dans \mathbb{R} . $\int_0^x t^2 f_a(t) dt = \int_0^x \left(t^2 \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right) dt = \left[t^2 \left(-e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right) \right]_0^x - \int_0^x 2t \left(-e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right) dt$.

$\int_0^x t^2 f_a(t) dt = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + 2 \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + 2a^2 \int_0^x \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt$.

$\int_0^x t^2 f_a(t) dt = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + 2a^2 \int_0^x f_a(t) dt$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right) = 0$ par croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2a^2 \int_0^x f_a(t) dt \right) = 2a^2 \int_0^{+\infty} f_a(t) dt = 2a^2$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 f_a(t) dt = 2a^2$.

Donc $\int_0^{+\infty} t^2 f_a(t) dt$ converge et vaut $2a^2$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_a(t) dt$ converge et vaut $2a^2$.

Ainsi X possède un moment d'ordre 2, qui vaut $2a^2$, donc une variance.

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2a^2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} a \right)^2 = 2a^2 - \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{4 - \pi}{2} a^2$.

$$\boxed{X \text{ possède une variance qui vaut } \frac{4 - \pi}{2} a^2.}$$

5. a. Notons F_Z la fonction de répartition de Z .

V prend ses valeurs dans $]0, 1]$ donc $-2 \ln V$ prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$, $Z = a\sqrt{-2 \ln V}$ également.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Z(x) = 0 = F_a(x)$. Soit x un élément de $[0, +\infty[$.

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(a\sqrt{-2 \ln V} \leq x) = P\left(-2 \ln V \leq \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) = P\left(\ln V \geq -\frac{x^2}{2a^2}\right) = P\left(V \geq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right).$$

$$F_Z(x) = 1 - P\left(V < e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - P\left(V \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \text{ car } V \text{ est une variable aléatoire à densité.}$$

V suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ et $e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ appartient à $]0, 1]$ donc :

$$F_Z(x) = 1 - P\left(V \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = F_a(x).$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = F_a(x)$. Z a même loi que X .

Si V suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ alors $a\sqrt{-2 \ln V}$ suit la même loi que X .

b. Notons que la fonction random fournit un réel au hasard appartenant à $[0, 1[$ donc 1-random fournit un réel au hasard appartenant à $]0, 1]$...

```

1 program pipo;
2
3 var a:real;
4
5 begin
6
7   randomize;
8
9   write('Donner a (a strictement positif). a=');readln(a);
10
11  writeln('X prend la valeur :',a*sqrt(-2*ln(1-random)));
12
13 end.
```

6. $\{T_n > n + 1\}$ se réalise si et seulement si les $n + 1$ premiers tirages donnent $n + 1$ boules différentes. Ceci est impossible car l'urne contient n boules. Alors :

$$P(T_n > n + 1) = 0.$$

7. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$\{T_n > k\}$ se réalise si et seulement si les k premiers tirages donnent k boules différentes.

Notons un instant A_n^k le nombre de k -listes sans répétition d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Il y a n^k manières de faire k tirages avec remise dans l'urne U_n et il y a A_n^k manières de faire k tirages dans U_n et d'obtenir k boules différentes.

$$\text{Alors } P(T_n > k) = \frac{A_n^k}{n^k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = \frac{n!}{n^k (n-k)!}. \quad P(T_n > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}.$$

Notons que ce résultat vaut encore pour $k = 0$ car $P(T_n > 0) = 1 = \frac{n!}{1 \times n!} = \frac{n!}{n^0 (n-0)!}$.

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(T_n > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}.$$

► Dans la suite y appartient à $[0, +\infty[$ et $k_n = \text{Ent}(y\sqrt{n})$.

$$8. P(Y_n > y) = P\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} > y\right) = P(T_n > y\sqrt{n}).$$

Montrons que les événements $\{T_n > y\sqrt{n}\}$ et $\{T_n > k_n\}$ sont égaux.

Soit r un élément de \mathbb{N} .

- Supposons que $r > y\sqrt{n}$. Alors $r > y\sqrt{n} \geq \text{Ent}(y\sqrt{n}) = k_n$ et donc $r > k_n$.
- Réciproquement supposons que $r > k_n$. Comme r est un entier : $r \geq k_n + 1$. Donc $r \geq k_n + 1 > y\sqrt{n}$ et ainsi $r > y\sqrt{n}$.

Finalement $r > y\sqrt{n} \iff r > k_n$ et ceci pour tout r dans \mathbb{N} .

Alors, comme T_n prend ses valeurs dans \mathbb{N} , les événements $\{T_n > y\sqrt{n}\}$ et $\{T_n > k_n\}$ sont égaux.

Donc $P(Y_n > y) = P(T_n > y\sqrt{n}) = P(T_n > k_n)$.

$$P(Y_n > y) = P(T_n > k_n).$$

$$9. \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, k_n \leq y\sqrt{n} < 1 + k_n \text{ donc } \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, 0 \leq y - \frac{k_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on obtient par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = y$.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{k_n}{\sqrt{n}} \right) = 0 \times y = 0.$$

Donc il existe un élément n_0 de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ tel que : $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, \frac{k_n}{n} \leq 1$.

Soit n un élément de $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$. $k_n \leq n$ donc $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n) = \frac{n!}{n^{k_n} (n - k_n)!}$.

Observons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - k_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \right) = +\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 0$.

L'équivalent obtenu dans **I 9. b.** permet alors de dire que :

$P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n^{k_n} (n - k_n)^{n - k_n} e^{-(n - k_n)} \sqrt{2\pi(n - k_n)}}$. Donc, en simplifiant, il vient :

$$P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(\frac{n}{n - k_n} \right)^{n - k_n} \sqrt{\frac{n}{n - k_n}} \text{ ou } P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)^{k_n - n} \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1$ et ainsi $P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)^{k_n - n}$.

Pour tout réel y appartenant à $[0, +\infty[$, $P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.

10. a. $\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$. Alors $t-1 \underset{t \rightarrow 0}{=} -1 + t + o(t^2)$ et $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

Par produit $(t-1) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t + \frac{t^2}{2} - t^2 + o(t^2)$. $(t-1) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

Donc $-t + (t-1) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

$$-t + (t-1) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

b. Ce qui précède donne $-t + (t-1) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 0$: $-\frac{k_n}{n} + \left(\frac{k_n}{n} - 1\right) \ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{k_n^2}{2n^2}$.

En multipliant par n on obtient : $-k_n + (k_n - n) \ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{k_n^2}{2n}$.

Nous avons vu plus haut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = y$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n^2}{n} = y^2$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-k_n + (k_n - n) \ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{k_n^2}{2n}\right) = -\frac{y^2}{2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-k_n + (k_n - n) \ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}.$$

11. Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{y^2}{2}$ il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(-k_n + (k_n - n) \ln(1 - \frac{k_n}{n}))} = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}\right) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Or $P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n > y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}\right) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - P(Y_n > y)) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2}} = F_1(y)$ et ceci pour tout élément y de $[0, +\infty[$.

$\forall y \in]-\infty, 0[$, $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $P(Y_n \leq y) = P\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} \leq y\right) = P(T_n \leq y\sqrt{n}) = 0$.

Donc $\forall y \in]-\infty, 0[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq y) = 0 = F_1(y)$.

Finalement $\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq y) = 0 = F_1(y)$. Plus de doute :

la suite $(Y_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de densité f_1 .