

EMLYON 2015 S

Éléments de correction

Premier problème

Première partie

1. On peut vérifier le critère de sous-espace vectoriel ($0 \in E$ et, pour $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P_1 + P_2)(0) = \lambda P_1(0) + P_2(0) = 0$ et de même $(\lambda P_1 + P_2)(4) = 0$ si bien que $\lambda P_1 + P_2 \in E$) ou identifier E comme noyau de l'application $\mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P(4))$, clairement linéaire.
2. Pour qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ donné appartienne à E , il faut et il suffit que 0 et 4 en soient racines, c'est-à-dire que P soit multiple du polynôme $W = X(X - 4)$: il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = WQ$ i.e. $P = \phi(Q)$, nécessairement unique (par unicité du quotient dans la division euclidienne de P par W) et vérifiant $\deg Q = \deg P - \deg W \leq 2$. L'équivalence précédente prouve d'une part que l'application ϕ est à valeurs dans E et d'autre part qu'elle est bijective. Sa linéarité étant immédiate (pour $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi(\lambda Q_1 + Q_2) = W(\lambda Q_1 + Q_2) = \lambda WQ_1 + WQ_2 = \lambda \phi(Q_1) + \phi(Q_2)$), c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E .
3. Puisqu'un isomorphisme préserve la dimension et transforme une base en base, l'espace E est de dimension $\dim E = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et les images des vecteurs de la base canonique $\phi(1) = W$, $\phi(X) = WX$ et $\phi(X^2) = WX^2$ en forment une base.
4. a. La linéarité de Δ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est immédiate :

$$\begin{aligned} \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Delta(\lambda Q_1 + Q_2) &= (\lambda Q_1 + Q_2)(X + 1) - (\lambda Q_1 + Q_2)(X) \\ &= \lambda(Q_1(X + 1) - Q_1(X)) + (Q_2(X + 1) - Q_2(X)) = \lambda \Delta(Q_1) + \Delta(Q_2). \end{aligned}$$

Pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q(X + 1)$ est de même degré que $Q(X)$ donc $\Delta(Q) = Q(X + 1) - Q(X)$ appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. L'application Δ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- b. Le calcul donne $\Delta(1) = 0$, $\Delta(X) = 1$ et $\Delta(X^2) = 2X + 1$. Par suite,
 - pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ constant, on a donc $\Delta(Q) = 0$;
 - pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré 1 : $Q = aX + b$ avec $a \neq 0$, $\Delta(Q) = a\Delta(X)$ est de degré 0 ;
 - pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré 2 : $Q = aX^2 + Q_1$ avec $a \neq 0$ et $\deg Q_1 \leq 1$, $\Delta(Q) = a\Delta(X^2) + \Delta(Q_1)$ est de degré 1 car on vient de voir que $\deg \Delta(Q_1) \leq 0$.

En conclusion,

$$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \deg \Delta(Q) = \begin{cases} (\deg Q) - 1 & \text{si } \deg Q \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg Q \leq 0 \end{cases} \leq (\deg Q) - 1.$$

- c. Pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\Delta(Q) = 0$ équivaut à $\deg \Delta(Q) = -\infty$. D'après **b.**, le noyau de Δ est donc constitué des polynômes constants : $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.

Quant au sous-espace $\text{Im } \Delta$, il est engendré par les images des vecteurs de la base canonique calculées plus haut : il s'agit du sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$. On peut aussi le montrer par un argument dimensionnel : la question **b.** met en évidence que $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } \Delta) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \text{Ker } \Delta = 2$. On a ainsi égalité des dimensions dans l'inclusion précédente, qui est donc une égalité : $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_1[X]$.

- d. D'après **b.**, on a $\deg \Delta^3(Q) \leq (\deg Q) - 3 < 0$ i.e. $\Delta^3(Q) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, ce qui signifie que l'application Δ^3 est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_2[X]$.

5. a. Il vient $f^3 = (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1})^3 = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = 0$ d'après **4.d.**

- b. On utilise la bijectivité de ϕ . Pour $P \in E$ et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = WQ$, $f(P) = 0$ équivaut à $\Delta(Q) = 0$ i.e. à Q constant ou encore $P \in \text{Vect } W$. Le noyau de f est donc la droite dirigée par W : $\text{Ker } f = \text{Vect } W$. Connaissant l'image de Δ , il vient ensuite :

$$\text{Im } f = \phi(\Delta(\phi^{-1}(E))) = \phi(\Delta(\mathbb{R}_2[X])) = \phi(\mathbb{R}_1[X]) = \text{Vect}(\phi(1), \phi(X)) = \text{Vect}(W, XW).$$

- c. Les valeurs propres de f sont racines du polynôme X^3 , annulateur de f d'après **a.**. Ainsi 0 est la seule valeur propre éventuelle de f , qui réciproquement est bien valeur propre de sous-espace propre associé $\text{Ker } f = \text{Vect } W \neq \{0\}$ d'après **b.**

- d. D'après **c.**, $\sum_{\lambda \in \text{Sp } f} \dim E_\lambda(f) = \dim E_0(f) = 1 < \dim E$, d'où l'on déduit que f n'est pas diagonalisable.

Deuxième partie

6. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique ($\forall P, Q \in \mathbb{R}_4[X], \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$) et linéaire à gauche ($\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_4[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$) donc bilinéaire. Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on a de plus $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^4 P(k)^2 \geq 0$ car $P(k)^2 \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ et, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors 0, 1, 2, 3 et 4 constituent 5 racines pour le polynôme P de degré inférieur ou égal à 4, qui est donc nul.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

7. Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont des réels tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$, alors en évaluant la relation en 1 (resp. en 2, resp. en 3), on obtient $\lambda_1 = 0$ (resp. $\lambda_2 = 0$, resp. $\lambda_3 = 0$). La famille (L_1, L_2, L_3) est donc libre. Formée de $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, c'en est donc une base.

8. a. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ donné, il existe d'après 7. des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$. En évaluant la relation précédente en 1, 2 et 3, on obtient les valeurs des coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) : $\lambda_1 = \frac{1}{2}P(1), \lambda_2 = -P(2)$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}P(3)$.

b. On calcule :

$$\Delta(L_1) = (X - 1)(X - 2) - (X - 2)(X - 3), \quad \Delta(L_2) = X(X - 2) - (X - 1)(X - 3)$$

$$\text{et } \Delta(L_3) = X(X - 1) - (X - 1)(X - 2).$$

La décomposition de $\Delta(L_1) = L_3 - L_1$ sur la base (L_1, L_2, L_3) est évidente et justifie la première colonne de la matrice A représentant Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) . Pour celles de $\Delta(L_2)$ et $\Delta(L_3)$, on utilise le résultat de la question a. :

$$\Delta(L_2) = \frac{1}{2}(\Delta(L_2))(1)L_1 - (\Delta(L_2))(2)L_2 + \frac{1}{2}(\Delta(L_2))(3)L_3 = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3$$

et, de la même manière, $\Delta(L_3) = -2L_2 + 2L_3$, d'où le résultat.

9. a. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ donné, le réel i n'annule ni W ni L_i donc pas non plus leur produit $M_i : M_i(i) \neq 0$.

b. On vérifie que :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \quad N_i(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}. \tag{1}$$

Il en ressort que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \langle N_i, N_j \rangle = \sum_{k=0}^4 N_i(k)N_j(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

car, dans la somme précédente, tous les termes sont nuls si $i \neq j$ (car on aura toujours $k \neq i$ ou $k \neq j$) et, si $i = j$, le seul terme non nul est celui d'indice $k = i = j$ qui vaut 1.

Ainsi la famille (N_1, N_2, N_3) est orthonormale donc libre. Formée de $3 = \dim E$ vecteurs de E d'après 2. et 3., c'est en fait une base orthonormale de E .

10. Par définition, $\phi(L_j) = WL_j = M_j = M_j(j)N_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, d'où la matrice représentative de ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) et (N_1, N_2, N_3) :

$$B = \begin{pmatrix} M_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & M_2(2) & 0 \\ 0 & 0 & M_3(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

11. La matrice C de la composée $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$ dans la base (N_1, N_2, N_3) s'obtient à partir de celles de l'endomorphisme Δ en base (L_1, L_2, L_3) et de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) et (N_1, N_2, N_3) , toutes deux déterminées dans les questions 8.b. et 10. :

$$C = BAB^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix}.$$

12. a. Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $u(P)$ appartient à $\mathbb{R}_4[X]$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$. La linéarité de u étant immédiate, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b. Vu (1) et sachant que la famille (N_1, N_2, N_3) est orthonormale, il vient :

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad \forall j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \langle u(P), N_j \rangle = P(j) = \langle P, N_j \rangle, \tag{2}$$

d'où le résultat.

c. Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$ donné, le vecteur $u(P)$ vérifie $u(P) \in E$ (comme combinaison linéaire d'éléments de E) et $P - u(P) \perp E$ (car $P - u(P)$ est orthogonal aux vecteurs de base N_1, N_2 et N_3 de E d'après **b.**), deux propriétés caractéristiques du projeté orthogonal de P sur E . L'endomorphisme u est donc la projection orthogonale sur E .

Remarque. En utilisant (2), on peut aussi reconnaître dans la définition de $u(P) = \sum_{i=1}^3 \langle N_i, P \rangle N_i$ l'expression du projeté orthogonal de P sur E rapporté à la base orthonormale (N_1, N_2, N_3) et conclure directement.

d. D'après la question **c.**, le projeté orthogonal de Q sur E est donné par $u(Q) = \sum_{i=1}^3 Q(i)N_i = 2N_1$.

Deuxième problème

Première partie

On peut noter pour commencer que pour $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0 \iff u(t) = o(t^p), t \rightarrow +\infty.$$

1. Il suffit de vérifier le critère de sous-espace. La fonction nulle appartient clairement à E et, étant donné un réel α , deux éléments $u, v \in E$ et des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $u(t) = o(t^p)$ et $v(t) = o(t^q)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a pour $r = p + q$ (n'importe quel entier $r \geq \max(p, q)$ convient) :

$$\frac{\alpha u(t) + v(t)}{t^r} = \alpha \frac{1}{t^q} \frac{u(t)}{t^p} + \frac{1}{t^p} \frac{v(t)}{t^q} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui assure que la fonction continue $\alpha u + v$ appartient à E .

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(t) = o(t^p)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour $x > 0$ donné, la fonction $t \mapsto u(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et l'on a :

$$t^2 u(t) e^{-xt} = (t^{p+2} e^{-xt}) \frac{u(t)}{t^p} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

car les deux facteurs tendent vers 0, le premier par croissances comparées et le second par hypothèse. Ainsi $u(t)e^{-xt} = o(\frac{1}{t^2})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, d'où l'on déduit la convergence absolue (et donc la convergence) de l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt} dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

3. Étant donné $u, v \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} (L(\alpha u + v))(x) &= \int_0^{+\infty} (\alpha u(t) + v(t)) e^{-xt} dt = \alpha \int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} v(t) e^{-xt} dt \\ &= \alpha (L(u))(x) + (L(v))(x), \end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes d'après **2.**, ce qui traduit l'égalité de fonctions $L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$.

Deuxième partie

4. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, la fonction v_i est continue sur \mathbb{R}_+ et vérifie $v_i(t) = o(t^p)$ avec $p = 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, c'est donc un élément de E . En considérant, pour $x > 0$ donné, une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $a + x$, dont on note f la densité, il vient :

$$\begin{aligned} (L(v_0))(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+x)t} dt = \frac{1}{a+x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{a+x}, \\ (L(v_1))(x) &= \int_0^{+\infty} t e^{-(a+x)t} dt = \frac{1}{a+x} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{a+x} \mathbb{E}(X) = \frac{1}{(a+x)^2} \end{aligned}$$

et, sur le même principe,

$$(L(v_2))(x) = \frac{1}{a+x} \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{a+x} (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \frac{2}{(a+x)^3}.$$

5. La fonction w_n est continue sur \mathbb{R}_+ et vérifie $w_n(t) = o(t^{n+1})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, c'est donc un élément de E . De plus, par changement de variable affine $s = xt$,

$$\forall x > 0, \quad (\mathcal{L}(w_n))(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{x}\right)^n e^{-s} \frac{ds}{x} = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Troisième partie

6. Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(t) = o(t^p)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. En écrivant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence d'un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \geq A$, $|\frac{u(t)}{t^p}| \leq 1$ i.e. $|u(t)| \leq t^p$. La fonction u étant par ailleurs continue sur le segment $[0, A]$, elle y est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0, A]$, $|u(t)| \leq M$. On en déduit immédiatement (en distinguant les cas $t \leq A$ et $t \geq A$) que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|u(t)| \leq M + t^p$.

On a alors (toutes intégrales convergentes) :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad |(\mathcal{L}(u))(x)| &\leq \int_0^{+\infty} |u(t)| e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} (M + t^p) e^{-xt} dt \\ &= M(\mathcal{L}(w_0))(x) + (\mathcal{L}(w_p))(x) = \frac{1}{x} + \frac{p!}{x^{p+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

d'après 5., d'où l'on déduit par encadrement que $(\mathcal{L}(u))(x)$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

7. a. Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral appliqué à la fonction u continue sur \mathbb{R}_+ indique que la fonction $t \mapsto \int_0^t u(s) ds$ est une primitive de u sur l'intervalle \mathbb{R}_+ . On en déduit que

$$R : t \mapsto \int_t^{+\infty} u(s) ds = \int_0^{+\infty} u(s) ds - \int_0^t u(s) ds$$

est continue sur \mathbb{R}_+ . Par ailleurs il apparaît clairement sur l'expression précédente, sachant l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(s) ds$ convergente, que $R(t)$ tend vers 0 i.e. que $R(t) = o(t^p)$ avec $p = 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. La fonction R appartient donc à E .

b. Il résulte de l'argument développé en a. que la fonction R est dérivable sur \mathbb{R}_+ , de dérivée $R' = -u$, continue par hypothèse. Elle est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

c. Pour $x > 0$ donné, une intégration par parties sur $[0, t] \subset \mathbb{R}_+$ donne, d'après b. :

$$\int_0^t u(s) e^{-sx} ds = [-R(s) e^{-sx}]_{s=0}^t - x \int_0^t R(s) e^{-sx} ds = R(0) - R(t) e^{-tx} - x \int_0^t R(s) e^{-sx} ds.$$

En passant à la limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, on obtient d'après a. :

$$(\mathcal{L}(u))(x) = \int_0^{+\infty} u(s) e^{-sx} ds = R(0) - x \int_0^{+\infty} R(s) e^{-sx} ds = R(0) - x(\mathcal{L}(R))(x).$$

d. Puisque $R(t)$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ d'après a., il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [B, +\infty[$, $|R(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après c., on a alors pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}(u))(x) - R(0)| &= x \left| \int_0^B R(t) e^{-xt} dt + \int_B^{+\infty} R(t) e^{-st} dt \right| \\ &\leq x \left| \int_0^B R(t) e^{-xt} dt \right| + x \left| \int_B^{+\infty} R(t) e^{-st} dt \right| \\ &\leq x \int_0^B |R(t)| e^{-xt} dt + x \int_B^{+\infty} |R(t)| e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^B |R(t)| dt + x \frac{\varepsilon}{2} \int_B^{+\infty} e^{-xt} dt \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

e. On conserve les notations de la question d.. Puisque le réel B ne dépend pas de x , le majorant tend vers $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ lorsque $x \rightarrow 0$ dans la dernière inégalité de d.. Il existe donc $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \delta[, \quad |(\mathcal{L}(u))(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On a donc établi que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (L(u))(x) = R(0) = \int_0^{+\infty} u(t) dt.$$

8. a. D'après la question 6. appliquée à la fonction $u' \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [A, +\infty[$, $|u'(t)| \leq t^p$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in [A, +\infty[, \quad |u(t)| &= \left| u(A) + \int_A^t u'(s) ds \right| \leq |u(A)| + \int_A^t |u'(s)| ds \\ &\leq |u(A)| + \int_A^t s^p ds \leq |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}. \end{aligned}$$

- b. Il ressort de la question précédente que $u(t) = o(t^{p+2})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, si bien que la fonction continue u appartient à E .
 c. On procède par intégration par parties comme dans la question 7.c., en primitivant u' en u .
 9. a. Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(t) = o(t^p)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui entraîne $u_n(t) = o(t^{n+p})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et la fonction continue u_n appartient donc à E .
 b. Pour $a \in \mathbb{R}$ donné, la fonction \exp est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, a]$ avec (en distinguant les cas $a \geq 0$ et $a \leq 0$) :

$$\forall x \in [0, a], \quad |\exp''(x)| = e^x \leq e^{|a|}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à \exp à l'ordre 1 sur le segment $[0, a]$, on a donc :

$$|e^a - 1 - a| = |e^a - e^0 - \exp'(0)a| \leq \left(\sup_{x \in [0, a]} |\exp''(x)| \right) \frac{a^2}{2} \leq e^{|a|} \frac{a^2}{2}.$$

- c. Pour $t \in [0, +\infty[$, l'inégalité de la question b. appliquée à $a = -ht$ donne, puisque $|h| \leq \frac{x}{2}$:

$$\left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| = \left| \frac{e^{-xt}}{h} \right| |e^{-ht} - 1 + ht| \leq \left| \frac{e^{-xt}}{h} \right| \frac{(ht)^2}{2} e^{|h|t} \leq \frac{|h|}{2} t^2 e^{-xt/2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{(L(u))(x+h) - (L(u))(x)}{h} + (L(u_1))(x) \right| &= \left| \int_0^{+\infty} u(t) \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |u(t)| \left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| dt \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2} dt, \end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes.

- d. Soit $x > 0$. On déduit de la dernière majoration de la question c., par encadrement (le majorant tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$ car l'intégrale ne dépend pas de h), que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L(u))(x+h) - (L(u))(x)}{h} = -(L(u_1))(x),$$

ce qui établit la dérivabilité de $L(u)$ en x , de dérivée $(L(u))'(x) = -(L(u_1))(x)$. Ainsi $L(u)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée $(L(u))' = -L(u_1)$.

- e. On démontre par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 1$, $L(u)$ est n fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec $(L(u))^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$. Le cas $n = 1$ a été traité en d. et si le résultat est acquis au rang n alors, toujours d'après d. appliquée à la fonction u_n , $L(u_n)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $(L(u_n))' = -L(u_{n+1})$ si bien, par hypothèse de récurrence, que $L(u)$ est $n + 1$ fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec $(L(u))^{(n+1)} = (-1)^{n+1} L(u_{n+1})$.

Quatrième partie

10. a. Sachant que $u'' \in E$, la question 8. montre que $u' \in E$ puis $u \in E$ avec :

$$\forall x > 0, \quad (L(u''))(x) = -u'(0) + x(L(u'))(x) = -u'(0) - xu(0) + x^2(L(u))(x).$$

- b. Puisque u est solution du problème, on a plus précisément :

$$\forall x > 0, \quad (L(u'))(x) = -u(0) + x(L(u))(x) = -1 + x(L(u))(x)$$

www.rb11d.fr

et

$$\forall x > 0, \quad (\mathbf{L}(u''))(x) = 2 - x + x^2(\mathbf{L}(u))(x)$$

d'où, par linéarité de \mathbf{L} ,

$$\forall x > 0, \quad (\mathbf{L}(u'' + 5u' + 6u))(x) = -3 - x + (x^2 + 5x + 6)(\mathbf{L}(u))(x).$$

Vu le calcul de transformée de Laplace effectué en 4., on a donc :

$$\forall x > 0, \quad (x^2 + 5x + 6)(\mathbf{L}(u))(x) = (\mathbf{L}(t \mapsto e^{-t}))(x) + 3 + x = \frac{1}{x+1} + 3 + x.$$

On vérifie alors, en divisant par $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) > 0$,

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad (\mathbf{L}(u))(x) &= \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \left(\frac{1}{x+1} + 3 + x \right) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

où la dernière égalité se justifie en remettant au même dénominateur le membre de droite.

11. Par linéarité de \mathbf{L} et d'après les exemples étudiés en 4.,

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3} = \left(\mathbf{L} \left(t \mapsto \frac{e^{-t} + e^{-3t}}{2} \right) \right)(x).$$

D'après **10.b.**, on est conduit à s'intéresser à la fonction $u : t \mapsto \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})$, qui n'est pour l'instant qu'un candidat et dont il convient de vérifier soigneusement qu'elle est solution. Il s'agit tout d'abord d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ dont les dérivées sont données par :

$$u' : t \mapsto \frac{-e^{-t} - 3e^{-3t}}{2} \quad \text{et} \quad u'' : t \mapsto \frac{e^{-t} + 9e^{-3t}}{2}.$$

On constate bien que $u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et d'autre part que $u(0) = 1$ et $u'(0) = -2$. La fonction $u : t \mapsto \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})$ est donc solution du problème posé.

Remarque. Bien qu'on n'ait pas les moyens de le démontrer ici, cette solution est unique.

