

EMLYON 2019 S

Éléments de correction

Première partie

1. L'application Ψ_a est linéaire par linéarité de la dérivation, et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On a $\Psi_a(1) = 2$ et

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \Psi_a(X^j) = (j+2)X^j - jaX^{j-1},$$

d'où l'on déduit la matrice représentative de Ψ_a en base \mathcal{B} :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -2a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

de coefficient générique

$$m_{i,j} = \begin{cases} 2+j & \text{si } i=j \\ -ja & \text{si } i=j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

3. **a.** L'endomorphisme Ψ_a admet les mêmes valeurs propres que sa matrice représentative en base \mathcal{B} . Celle-ci étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi l'endomorphisme Ψ_a admet $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres deux-à-deux distinctes : $2, 3, \dots, n+2$; il est donc diagonalisable.
 - b.** Puisqu'il n'admet pas 0 pour valeur propre, l'endomorphisme Ψ_a de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie est inversible : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - c.** Le calcul donne immédiatement $\Psi_a(Q_k) = (k+2)Q_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 - d.** Puisque l'endomorphisme Ψ_a admet $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres deux-à-deux distinctes, ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1. D'après la question **c.**, le sous-espace propre $E_{k+2}(\Psi_a)$ est donc la droite dirigée par Q_k pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
4. **a.** Le calcul donne immédiatement :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad ((X-a)^2 P)' = (X-a)\Psi_a(P).$$

- b.** Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il vient d'après **a.** :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad \Phi_a(\Psi_a(P))(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x ((t-a)^2 P(t))' dt = \frac{1}{(x-a)^2} [(t-a)^2 P(t)]_a^x = P(x)$$

et les deux membres extrêmes sont encore égaux pour $x = a$, si bien qu'en identifiant un polynôme avec la fonction polynomiale associée, $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.

- c.** Puisque Ψ_a est bijectif d'après **3.b.**, la formule de la question **b.** s'écrit $\Phi_a(Q) = \Psi_a^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Cela montre d'une part que Φ_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ (ce qui n'était pas évident sur sa définition), et d'autre part que $\Phi_a = \Psi_a^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ comme réciproque d'un automorphisme, d'inverse $\Phi_a^{-1} = (\Psi_a^{-1})^{-1} = \Psi_a$.
- d.** D'après **3.c.** et **c.**, on a $\Phi_a(Q_k) = \frac{1}{k+2}Q_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par suite, les $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ réels deux-à-deux distincts $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+2}$ sont valeurs propres de l'endomorphisme Φ_a , qui est donc diagonalisable et n'admet pas d'autre valeur propre.

Deuxième partie

5. **a.** Puisque la fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur \mathbb{R} , la fonction $h : x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , avec $h'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- b.** Soit $x > 0$ donné. La fonction f étant continue sur le segment $[0, x]$, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe $\alpha_x, \beta_x \in [0, x]$ tels que pour tout $t \in [0, x]$, $f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x)$. On a alors, puisque $x > 0$:

$$f(\alpha_x) \int_0^x t \, dt = \int_0^x tf(\alpha_x) \, dt \leq \int_0^x tf(t) \, dt \leq \int_0^x tf(\beta_x) \, dt = f(\beta_x) \int_0^x t \, dt.$$

- c.** Le résultat précédent s'écrit encore :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}.$$

Or, lorsque $x \rightarrow 0$, α_x et β_x qui appartiennent à $[0, x]$ tendent vers 0 et, par continuité de f , $f(\alpha_x)$ et $f(\beta_x)$ tendent vers $f(0)$. Il en ressort donc par encadrement que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$$

- d.** En définissant, pour $x < 0$ donné, α_x et β_x comme ci-dessus, il vient :

$$\forall t \in [0, x] \subset \mathbb{R}_-, \quad tf(\alpha_x) \geq tf(t) \geq tf(\beta_x)$$

puis, compte-tenu des bornes qui sont dans « le mauvais sens »,

$$\forall x < 0, \quad f(\alpha_x) \int_0^x t \, dt \leq \int_0^x tf(t) \, dt \leq f(\beta_x) \int_0^x t \, dt.$$

On en déduit de même par encadrement que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$$

- 6.** La fonction $\Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 d'après **5.a.** avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (\Phi(f))'(x) = \frac{xh'(x) - 2h(x)}{x^3} = \frac{f(x) - 2\Phi(f)(x)}{x}.$$

Elle est par ailleurs continue en 0 d'après **5.c.** et **5.d.**

- 7. a.** On considère la fonction $\check{f} : x \mapsto f(-x)$, continue sur \mathbb{R} . Par changement de variable affine $u = -t$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi(\check{f})(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(-t) \, dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{-x} uf(u) \, du = \Phi(f)(-x),$$

les deux membres extrémaux étant encore égaux pour $x = 0$.

Si f est paire i.e. $\check{f} = f$, alors $\Phi(\check{f}) = \Phi(f)$, ce qui prouve que $\Phi(f)$ est paire d'après le calcul précédent.

Si f est impaire i.e. $\check{f} = -f$, alors $\Phi(\check{f}) = -\Phi(f)$, ce qui prouve que $\Phi(f)$ est impaire d'après le calcul précédent.

- b.** Si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)(x) \geq 0$ pour $x > 0$ (on intègre une fonction positive entre des bornes bien ordonnées), pour $x = 0$ et pour $x < 0$ (on intègre une fonction négative entre des bornes mal ordonnées).

- 8. a.** La fonction g étant continue sur \mathbb{R} et de limite nulle en $+\infty$, on peut lui appliquer le résultat admis :

$$\Phi(g)(x) = \Phi(f)(x) - \frac{\ell}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui signifie que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}.$$

- b.** Si f admet ℓ pour limite en $-\infty$, alors $h = \check{f}$ admet ℓ pour limite en $+\infty$. D'après **a.**, on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(\check{f})(x) = \frac{\ell}{2},$$

d'où il ressort d'après **7.a.** que

$$\Phi(f)(x) = \Phi(\check{f})(-x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{\ell}{2}.$$

www.inltd.fr

Troisième partie

9. Pour $x > 0$ et $t \in [0, x]$, la croissance de F donne $0 \leq tF(t) \leq tF(x)$ d'où, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq G(x) \leq \frac{2}{x^2} F(x) \int_0^x t dt = F(x).$$

Pour $x < 0$ et $t \in [0, x] \subset \mathbb{R}_-$, on a cette fois $0 \leq F(x) \leq F(t)$ d'où $0 \geq tF(x) \geq tF(t)$ puis, en tenant compte de l'ordre des bornes, $0 \leq F(x) \leq G(x)$.

10. Par application directe de la question 6. à la fonction F , continue sur \mathbb{R} comme fonction de répartition d'une variable à densité, on justifie que $G = 2\Phi(F)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G'(x) = \frac{2}{x}(F(x) - G(x)).$$

11. Il ressort de la questions 9. et 10. que g est continue sur \mathbb{R}^* et positive sur \mathbb{R} . Par ailleurs, elle admet pour primitive G sur \mathbb{R}^* , qui est continue en 0 d'après 6. et admet pour limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$ d'après la question 8., ce qui garantit la convergence et donne la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^0 g(t) dt + \int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) - \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 1.$$

Toutes les conditions sont donc réunies pour que g soit une densité de probabilité. Soit V une variable aléatoire de densité g . Comme on l'a vu ci-dessus, G est une primitive de g sur \mathbb{R}^* et diffère donc d'une constante de la fonction de répartition de V sur chacun des intervalles \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ où g est continue. L'examen des limites en $-\infty$ et $+\infty$ montre que ces constantes sont nulles, si bien que G , par ailleurs continue en 0, est la fonction de répartition de V .

12. a. La fonction h_1 est positive sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} (même en 0) avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x h_1(t) dt = 1 - e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t) dt$ est donc convergente et égale à 1, ce qui fait de h_1 une densité de probabilité.

b. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$, de densité $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. La variable Y admet espérance et variance égales à $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{2}$. On en déduit la convergence de l'intégrale ci-dessous avec, par parité de φ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t h_1(t) dt = 2\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt = \sqrt{\pi} \mathbb{E}(Y^2),$$

ce qui garantit l'existence et donne la valeur de $\mathbb{E}(X_1) = \sqrt{\pi} \mathbb{V}(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c. On a tout d'abord

$$H_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^x h_1(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Par suite, $H_2(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x < 0$ alors que pour $x > 0$,

$$H_2(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x t H_1(t) dt = \frac{2}{x^2} \int_0^x (t - t e^{-t^2}) dt = \frac{1}{x^2} [t^2 + e^{-t^2}]_0^x = 1 - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}.$$

La variable X_2 admet donc pour densité

$$h_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{x^3} (1 - (1 + x^2)e^{-x^2}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On observe que $h_2(x) = o(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, si bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t h_2(t) dt = \int_0^{+\infty} t h_2(t) dt$ converge (la convergence étant automatique en 0 puisque h_2 est une densité), ce qui garantit l'existence de $\mathbb{E}(X_2)$.

www.rb110.fr

Quatrième partie

13. **a.** Il suffit, pour $x, y \in \mathbb{R}$, de développer le membre de gauche dans l'inégalité $(|x| - |y|)^2 \geq 0$.
b. Pour $f, g \in E_2$, la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec, d'après **a.**,

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f(x)g(x)| \leq \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est donc absolument convergente par comparaison aux intégrales convergentes $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} g(x)^2 dx$.

14. La fonction nulle appartient bien sûr à E_2 . Pour $f, g \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))^2 dx = \lambda^2 \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx + 2\lambda \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx + \int_0^{+\infty} g(x)^2 dx$$

est convergente comme somme d'intégrales convergentes d'après **13.b.**, si bien que $\lambda f + g \in E_2$. Ainsi E_2 vérifie le critère de sous-espace vectoriel de E .

15. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale généralisée convergente et clairement symétrique. Par ailleurs pour $f \in E_2$,

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx \geq 0$$

avec égalité si, et seulement si, $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ i.e. $f = 0$ puisque la fonction f^2 est continue et positive sur \mathbb{R}_+ . Toutes les conditions sont donc réunies pour que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E_2 .

16. **a.** D'après les questions **5.c.** et **5.d.**, qui s'appliquent car f est continue,

$$\frac{h(x)^2}{x^4} = \left(\frac{h(x)}{x^2}\right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{f(0)^2}{4}.$$

Par suite,

$$\frac{h(x)^2}{x^3} = x \frac{h(x)^2}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

- b.** Soit $X > 0$. On remarque pour commencer que l'intégrale $\int_0^X f(x)\Phi(f)(x) dx$ est bien définie compte-tenu de la continuité de la fonction $x \mapsto f(x)\Phi(f)(x)$ sur $[0, +\infty[$ (cf. question **6.**). La fonction $x \mapsto \frac{h(x)^2}{x^4}$ est quant à elle prolongeable par continuité à $[0, +\infty[$ d'après **a.**, si bien que l'intégrale $\int_0^X \frac{h(x)^2}{x^4} dx$ est faussement généralisée.

On obtient ensuite, par intégration par parties sur $[\varepsilon, X] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^X \frac{h(x)^2}{x^4} dx &= \left[-\frac{h(x)^2}{3x^3}\right]_{\varepsilon}^X + \int_{\varepsilon}^X \frac{2h(x)h'(x)}{3x^3} dx \\ &= \frac{h(\varepsilon)^2}{3\varepsilon^3} - \frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{2}{3} \int_{\varepsilon}^X f(x)\Phi(f)(x) dx. \end{aligned}$$

Un passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ conduit alors à la relation attendue d'après **a.** :

$$\int_0^X \frac{h(x)^2}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{h(X)^2}{X^3} + \frac{2}{3} \int_0^X f(x)\Phi(f)(x) dx.$$

- c.** Si $\int_0^X f(x)^2 dx = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[0, X]$ puisque la fonction f^2 est continue et positive, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors évidente.

Si $\int_0^X f(x)^2 dx \neq 0$, il apparaît sur la formule

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_0^X (\lambda f(x) + \Phi(f)(x))^2 dx = \lambda^2 \int_0^X f(x)^2 dx + 2\lambda \int_0^X f(x)\Phi(f)(x) dx + \int_0^X \Phi(f)(x)^2 dx$$

montre que la fonction $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^X (\lambda f(x) + \Phi(f)(x))^2 dx$ est polynomiale de degré 2. Puisqu'elle est à valeurs positives, elle ne peut avoir deux racines distinctes. Le discriminant associé est donc

négatif ou nul :

$$4\left(\int_0^X f(x)\Phi(f)(x) \, dx\right)^2 - 4\left(\int_0^X f(x)^2 \, dx\right)\left(\int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx\right) \leq 0,$$

d'où :

$$\int_0^X f(x)\Phi(f)(x) \, dx \leq \left|\int_0^X f(x)\Phi(f)(x) \, dx\right| \leq \left(\int_0^X f(x)^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

d. D'après **b.** et **c.**, on a pour $X > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx &= \int_0^X \frac{h(x)^2}{x^4} \, dx \leq \frac{2}{3} \int_0^X f(x)\Phi(f)(x) \, dx \\ &\leq \frac{2}{3} \left(\int_0^X f(x)^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En divisant les deux membres par l'intégrale $\int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx \geq 0$, à moins que celle-ci ne soit nulle auquel cas l'inégalité attendue est évidente, on obtient :

$$\left(\int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^X f(x)^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

e. Il ressort de la question **d.** que les intégrales partielles de la fonction continue $\Phi(f)^2$ sont majorées : sachant que $f \in E_2$,

$$\forall X > 0, \quad \int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx \leq \frac{4}{9} \int_0^X f(x)^2 \, dx \leq \frac{4}{9} \int_0^{+\infty} f(x)^2 \, dx.$$

Puisque la fonction $\Phi(f)^2$ est positive, son intégrale $\int_0^{+\infty} \Phi(f)(x)^2 \, dx$ est donc convergente, d'où l'on déduit que $\Phi(f)$ appartient à E_2 .

En passant à la limite lorsque $X \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité établie en **d.**, on obtient alors :

$$\|\Phi(f)\| = \left(\int_0^{+\infty} \Phi(f)(x)^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^{+\infty} f(x)^2 \, dx\right)^{1/2} = \frac{2}{3} \|f\|.$$

f. D'après les questions **13.b.** et **e.**, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\Phi(f)(x) \, dx$ est convergente. On en déduit, ainsi que de la relation établie en **b.**, que

$$X\Phi(f)(X)^2 = \frac{h(X)^2}{X^3} = 2 \int_0^X f(x)\Phi(f)(x) \, dx - 3 \int_0^X \Phi(f)(x)^2 \, dx$$

admet une limite finie κ lorsque $X \rightarrow +\infty$. L'hypothèse $\kappa \neq 0$ conduirait à $0 \leq \Phi(f)(X)^2 \sim \frac{\kappa}{X}$ lorsque $X \rightarrow +\infty$, ce qui contredirait la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Phi(f)(x)^2 \, dx$ établie en **e.** C'est donc que $\kappa = 0$.

g. En passant à la limite lorsque $X \rightarrow +\infty$ dans la relation établie en **b.**, on obtient alors :

$$\|\Phi(f)\|^2 = \int_0^{+\infty} \frac{h(x)^2}{x^4} \, dx = \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} f(x)\Phi(f)(x) \, dx = \frac{2}{3} \langle \Phi(f), f \rangle.$$

Cinquième partie

17. Le script ci-dessous propose un calcul itératif.

Listing 1 : calcul du terme général de la suite (v_n)

```

function v=suite_v(n)
    v=0;
    for k=1:n
        v=v+k*suite_u(k);
    end
    v=v/n/(n+1);
endfunction
    
```

18. **a.** La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge. On notera ℓ sa limite.



b. Les graphes fournis permettent de conjecturer que (v_n) est décroissante et converge vers $\frac{1}{2}\ell$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de $(u_k)_k$, il vient par sommation arithmétique :

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_k \geq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_n = \frac{u_n}{2}$$

et :

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\sum_{k=1}^n ku_k + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k \right) \leq \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\sum_{k=1}^n ku_k + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(n(n+1)v_n + n \frac{n+1+2n}{2} u_{n+1} \right) = \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}. \end{aligned}$$

d. Il vient aisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+2)v_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} ku_k = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^n ku_k + (n+1)u_{n+1} \right) = nv_n + u_{n+1}$$

d'où, en retranchant $2v_{n+1} + nv_n$ aux deux membres puis en divisant par n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}).$$

e. D'après **c.** et **d.**, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si bien que la suite (v_n) est décroissante. Clairement minorée par 0, elle est donc convergente; soit ℓ' sa limite. En passant à la limite dans les deux inégalités de la question **c.**, on obtient alors $\ell' \geq \frac{1}{2}\ell$ et $\ell' \leq \frac{1}{4}\ell' + \frac{3}{8}\ell$, soit $\ell' = \frac{\ell}{2}$.

19. a. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on obtient par permutation des sommes finies puis par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_n &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_k = \sum_{k=1}^N ku_k \sum_{n=k}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N ku_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) = \sum_{k=1}^N u_k - Nv_N. \end{aligned}$$

b. Puisque (u_n) et (v_n) sont à termes positifs et que la série $\sum u_n$ converge, il vient d'après **a.** :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N v_n \leq \sum_{n=1}^N u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$ est majorée, et comme cette dernière est à termes positifs, elle est donc convergente.

c. De **a.** et **b.**, on déduit que

$$Nv_N = \sum_{n=1}^N v_n - \sum_{n=1}^N u_n$$

admet une limite finie κ lorsque $N \rightarrow \infty$. Si cette limite était non nulle, on aurait $0 \leq v_N \sim \frac{\kappa}{N}$ lorsque $N \rightarrow \infty$, ce qui contredirait la convergence de la série $\sum v_n$ établie en **b.** C'est donc que $\kappa = 0$.

d. En passant à la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ dans la relation de la question **b.**, il vient d'après **c.** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

20. a. Comme la série de terme général $u_n = P(Y = n) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, il en va de même d'après **19.b.** de celle de terme général

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ku_k = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k P(Y = k) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

avec, d'après **19.d.**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = n) = 1.$$

Il existe donc une variable aléatoire Z à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que $P(Z = n) = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Puisque $Y \geq 1$, on a $E(Y) \geq 1$. Par suite,

$$\sum_{k=1}^n k P(Y = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(Y) \neq 0$$

www.rb11d.fr

si bien que

$$\mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y = k) \sim \frac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

On en déduit que $n \mathbb{P}(Z = n) \sim \frac{\mathbb{E}(Y)}{n} \geq 0$ est le terme général d'une série divergente, si bien que la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.

