CORRIGÉ
DU SUJET ZÉRO n°2

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
VOIE ECG

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques appliquées - Sujet zéro 2 - Corrigé

EXERCICE 1

1. X_1 désigne le rang d'apparition du premier succès (« obtenir Pile ») dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès p.
   Ainsi X_1 suit la loi géométrique de paramètre p .
   En comptant les lancers à partir de celui qui suit le premier Pile, X_2 désigne de même le rang d'apparition du premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès p,
   donc X_2 suit la loi géométrique de paramètre p .

   Une explication minimale est attendue des candidats.

2. On a $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) = (\mathbf{N}^*)^2$.
   Soit $(k, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$. En notant, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, P_i l'événement « obtenir Pile au i-ème lancer » et $F_i = \overline{P_i}$,

$$[X_1 = k] \cap [X_2 = j] = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k \cap F_{k+1} \cap \cdots \cap F_{k+j-1} \cap P_{k+j} \, ,$$

   donc par indépendance des événements intervenant dans cette intersection,

$$\begin{aligned} P\big([X_1 = k] \cap [X_2 = j]\big) &= P(F_1) \cdots P(F_{k-1}) P(P_k) P(F_{k+1}) \cdots P(F_{k+j-1}) P(P_{k+j}) \\ &= (1-p)^{k-1} p (1-p)^{j-1} p \\ &= p^2 (1-p)^{k+j-2}. \end{aligned}$$

   Ainsi $\forall (k, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) = p^2(1-p)^{k+j-2}$.

   Une écriture en événements est attendue, et l'indépendance doit être mentionnée.

3. Pour tout $(k, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$P\big([X_1 = k] \cap [X_2 = j]\big) = p^2(1-p)^{k+j-2} = p(1-p)^{k-1} \cdot p(1-p)^{j-1} = P(X_1 = k) P(X_2 = j) \, ,$$

   donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

4. Soit $n \geqslant 2$ un entier. D'après la formule des probabilités totales appliquée à $[X_1 + X_2 = n]$ avec le système complet d'événements $\big([X_1 = k]\big)_{k \in \mathbf{N}^*}$,

$$\begin{aligned} P([X_1 + X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X_1 = k] \cap [X_1 + X_2 = n]\big) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X_1 = k] \cap [X_2 = n-k]\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2 (1-p)^{k+(n-k)-2} \\ &\qquad \text{car pour } n-k \leqslant 0,\ n-k \notin X_2(\Omega) \text{ donc } P\big([X_1 = k] \cap [X_2 = n-k]\big) = 0 \\ &= (n-1) p^2 (1-p)^{n-2}, \end{aligned}$$

   Donc $\forall n \geqslant 2$, $P([X_1 + X_2 = n]) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$.

   Les candidats peuvent aussi écrire $[X_1 + X_n = n]$ comme l'union disjointe des événements $[X_1 = k] \cap [X_2 = n-k]$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

5.
```python
import numpy.random as rd
def simul_Y(p):
        Y = 0
        nb_pile = 0
        while nb_pile < 2 :
            if rd.random() < p :
                nb_pile = nb_pile + 1
            else :
                Y = Y + 1
        return Y
```

6. On remarque que $Y = X_1 + X_2 - 2$ puisque le nombre total de lancers effectués à la fin de l'expérience est égal à $X_1 + X_2$, et exactement deux de ces lancers sont des Piles.

Le résultat peut être donné ici sans justification.

7. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) - 2 = \frac{2}{p} - 2$$

Donc $E(Y) = \dfrac{2(1-p)}{p}$.

Par indépendance de X_1 et X_2,

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2).$$

Donc $V(Y) = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$

On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbf{N}^*$ donc $Y(\Omega) = \mathbf{N}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$P([Y = n]) = P(X_1 + X_2 = n + 2).$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ P([Y = n]) = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$

Autant le mot « linéarité » n'est pas attendu des candidats pour le calcul de l'espérance, autant l'indépendance doit être mentionnée pour le calcul de la variance.

8.
```python
def simul_UV(p):
    n = simul_Y(p)
    U = rd.randint(0,n+1)
    V = n-U
    return U, V
```

9. Pour chaque valeur possible $n \in \mathbf{N}$ de Y, U peut prendre toutes les valeurs de 0 à n. Ainsi,

$$U(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [\![0, n]\!] = \mathbf{N}.$$

Pour chaque valeur possible $n \in \mathbf{N}$ de Y, V peut prendre toutes les valeurs de $n - 0 = n$ à $n - n = 0$, donc on a également $V(\Omega) = \mathbf{N}$.

Une explication minimale est attendue pour $U(\Omega)$.

10. Soit $k \in \mathbf{N}$.
D'après la formule des probabilités totales appliquée à $[U = k]$ avec le système complet d'événements $\big([Y = n]\big)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$P([U = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[Y=n]}(U = k)P(Y = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)p^2(1-p)^n,$$

où l'on a remarqué que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[Y = n]$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$, et en particulier $P_{[Y=n]}(U = k) = 0$ si $n < k$.
Ainsi, à l'aide du changement d'indice $\ell = n - k$:

$$P([U = k]) = p^2 \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^n = p^2(1-p)^k \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^\ell = \frac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)}$$

car $|1 - p| < 1$.

> Ainsi, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\quad P([U = k]) = p(1-p)^k$

11. $U(\Omega) = \mathbf{N}$ donc $(U + 1)(\Omega) = \mathbf{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$P([U + 1 = k]) = P([U = k - 1]) = p(1-p)^{k-1},$$

> donc $U + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

On en déduit, par linéarité de l'espérance et par propriété de la variance :

$$E(U) = E(U + 1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p},$$

et

$$V(U) = V(U + 1) = \frac{1-p}{p^2}.$$

> Ainsi, $E(U) = \dfrac{1-p}{p}$ et $V(U) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Les formules donnant $E(aX + b)$ et $V(aX + b)$ peuvent être données directement sans justification.

12. On a déjà justifié que $V(\Omega) = \mathbf{N}$.
Soit $k \in \mathbf{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[V = k]$ avec le système complet d'événements $\big([Y = n]\big)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$\begin{aligned} P(V = k) &= P([Y - U = k]) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[Y=n]}([Y - U = k])P([Y = n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[Y=n]}([U = n - k])P([Y = n]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n + 1)p^2(1-p)^n \qquad \text{en reprenant le calcul de la question 10.} \\ &= P([U = k]), \end{aligned}$$

> Ainsi, U et V suivent la même loi.

13. (a) Soit $(k, j) \in \mathbf{N}^2$.

$$\begin{aligned} P\big([U = k] \cap [V = j]\big) &= P\big([U = k] \cap [Y - U = j]\big) \\ &= P\big([U = k] \cap [Y = k + j]\big) \\ &= P_{[Y=k+j]}(U = k)P(Y = k + j) \\ &= \frac{1}{k+j+1} \cdot (k + j + 1)p^2(1-p)^{k+j} \\ &= p(1-p)^k \cdot p(1-p)^j \\ &= P([U = k])P([V = j]). \end{aligned}$$

> Ainsi, U et V sont indépendantes.

(b) Par bilinéarité de la covariance, en écrivant $Y = U + V$,

$$\mathrm{Cov}(Y, U) = \mathrm{Cov}(U, U) + \mathrm{Cov}(V, U) = V(U)$$

car $\mathrm{Cov}(V, U) = 0$ par indépendance de U et V.

> Ainsi, $\mathrm{Cov}(Y, U) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

(c) Notons $\rho(Y,U)$ le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y,U), bien défini car $V(Y) \neq 0$ et $V(U) \neq 0$. D'après les questions précédentes,

$$\rho(Y,U) = \frac{\mathrm{Cov}(Y,U)}{\sqrt{V(Y)V(U)}} = \sqrt{\frac{V(U)}{V(Y)}} = \sqrt{\frac{\frac{1-p}{p^2}}{2\frac{1-p}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Donc $\rho(Y,U) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 2

Partie 1

1. Le domaine de définition de f est $\mathbf{R}$, centré en 0, et :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

donc f est impaire sur $\mathbf{R}$.

2. La fonction f est dérivable car polynomiale sur $[0,+\infty[$, et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \; f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$$

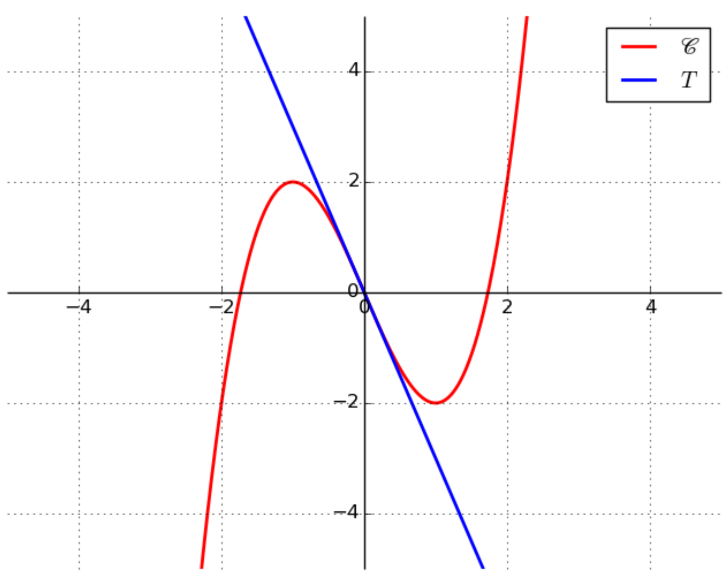
Ainsi, f' est strictement négative sur $]0,1[$, strictement positive sur $]1,+\infty[$ et ne s'annule qu'en 1.
Ainsi f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
Par ailleurs, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La stricte monotonie n'est pas un attendu dans cette question.

3. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ car polynomiale et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = 6x$, donc f'' est positive sur $[0,+\infty[$, négative sur $]-\infty,0]$ et ne s'annule qu'en 0.
Ainsi f est convexe sur $[0,+\infty[$, concave sur $]-\infty,0]$, et le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

4. On remarque que $f(x) \underset{x\to 0}{=} -3x + o(x)$, donc la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -3x$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) - (-3x) = x^3$ est du signe de x, donc $\mathscr{C}$ est en-dessous de T sur $]-\infty,0]$, et au-dessus de T sur $[0,+\infty[$.

5. En regroupant les informations obtenues aux questions précédentes, on obtient la figure suivante.



6. (a) Soit a un réel tel que $|a| < 2$. Alors $-2 < -a < 2$.

◇ D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $f\big([1, +\infty[\big) = [-2, +\infty[$.
Or $-a \in [-2, +\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = -a$ possède une unique solution ν dans $[1, +\infty[$.

◇ D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, 1[$.
D'après la question 1, f est impaire sur $\mathbf{R}$. Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-1, 1[$.
Donc f réalise une bijection de de $]-1, 1[$ sur $f\big(]-1, 1[\big) =]-2, 2[$ (car $f(1) = -2$ et $f(-1) = 2$).
Or $-a \in]-2, 2[$ donc l'équation $f(x) = -a$ possède une unique solution μ dans $]-1, 1[$.

◇ D'après la question 1, f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $f\big(]-\infty, -1]\big) =]-\infty, 2]$ (car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, et $f(-1) = 2$).
Or $-a \in]-\infty, 2]$ donc l'équation $f(x) = -a$ possède une unique solution λ dans $]-\infty, -1]$.

Finalement, l'équation $x^3 - 3x - a = 0$ possède exactement trois solutions réelles distinctes λ , μ et ν .

Les candidats peuvent ne détailler le raisonnement que sur un intervalle, et expliquer brièvement qu'on fait de même sur les deux autres intervalles.
Les candidats n'ayant pas traité la stricte monotonie en question 2, doivent impérativement la justifier ici, et non seulement la mentionner.

(b) Supposons $|a| > 2$, c'est-à-dire $-a > 2$ ou $-a < -2$. On distingue deux cas.

- Si $-a > 2$, alors $-a \notin f\big(]-\infty, 1]\big)$ et $-a \in f\big(]1, +\infty[\big)$, donc d'après la question précédente, l'équation $f(x) = -a$ admet une unique solution réelle, qui appartient à $]1, +\infty[$.

- Si $-a < -2$, alors $-a \notin f\big([-1, +\infty[$ et $-a \in f\big(]-\infty, -1[\big)$, donc d'après la question précédente, l'équation $f(x) = -a$ admet une unique solution réelle, qui appartient à $]-\infty, -1[$.

Dans tous les cas, l'équation $x^2 - 3x + a = 0$ possède une unique solution réelle .

Partie 2

7. (a) Le calcul donne $A_a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a & 3 & 0 \\ 0 & -a & 3 \end{pmatrix}$, puis $A_a^3 = \begin{pmatrix} -a & 3 & 0 \\ 0 & -a & 3 \\ -3a & 9 & -a \end{pmatrix}$, donc

$$A_a^3 - 3A_a + aI_3 = \begin{pmatrix} -a & 3 & 0 \\ 0 & -a & 3 \\ -3a & 9 & -a \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_3$$

Ainsi, $A_a^3 - 3A_a + aI_3 = 0_3$

(b) Or $-a + 3\lambda = \lambda^3$, donc $A_a X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a + 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}$.

On obtient donc que $A_a X = \lambda X$.

(c) Soit λ un réel. On montre l'équivalence souhaitée par double implication.

($\Longrightarrow$) Supposons que λ est valeur propre de A_a . D'après la question 7(a), $X^3 - 3X + a$ est un polynôme annulateur de A_a , donc $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$.

($\Longleftarrow$) Supposons $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$. Alors d'après la question précédente, en posant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, on a $X \neq 0$ et $A_a X = \lambda X$, donc λ est valeur propre de A_a (et X est un vecteur propre associé).

Ainsi, λ est valeur propre de $A_a \iff \lambda^3 - 3\lambda + a = 0$.

8. (a) D'après la question 7(c), λ est valeur propre de $A_2 \iff \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$.
On remarque que 1 est une racine évidente du polynôme $x^3 - 3x + 2$. On factorise alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2)$$

Finalement les valeurs propres de A_2 sont -2 et 1 .

◇ Le sous-espace propre de A_2 associé à la valeur propre -2 est le noyau de la matrice $A_2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est de rang 2, puisqu'elle est non-inversible ($\mathrm{rg}(A_2 + 2I_3) < 3$) et admet au moins deux colonnes non colinéaires ($\mathrm{rg}(A_2 + 2I_3) \geqslant 2$). Par théorème du rang, $\mathrm{Ker}(A_2 + 2I_3)$ est de dimension 1.
Or, d'après 7(b), $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A_2 + 2I_3)$,

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A_2 + 2I_3)$.

◇ Le sous-espace propre de A_2 associé à la valeur propre 1 est le noyau de la matrice $A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est de rang 2, puisqu'elle est non-inversible ($\mathrm{rg}(A_2 - I_3) < 3$) et admet au moins deux colonnes non colinéaires ($\mathrm{rg}(A_2 - I_3) \geqslant 2$). Par théorème du rang, $\mathrm{Ker}(A_2 - I_3)$ est de dimension 1.
Or, d'après 7(b), $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A_2 - I_3)$,

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A_2 - I_3)$.

L'esprit du programme est d'éviter toute méthode trop calculatoire pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. En particulier, les sujets privilégieront des méthodes où aucune résolution de système n'est en général nécessaire. Tout candidat faisant la méthode du pivot de Gauss ne sera pas pénalisé dans la correction, mais se pénalise tout seul en perdant un temps précieux.

(b) D'après la question précédente, $\dim(E_{-2}(A_2)) + \dim(E_1(A_2)) = 1 + 1 < \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}))$.
Ainsi, la matrice A_2 n'est pas diagonalisable .

Les candidats maladroits inscrivant que $\dim(E_{-2}(A_2) + \dim(E_1(A_2)) \neq \dim(\mathscr{M}_3(\mathbf{R}))$ n'obtiennent pas de point à la question.

9. D'après la question 6(b), l'équation $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$ possède une unique solution λ réelle. Autrement dit, d'après la question précédente, A_a possède une unique valeur propre. Notons la α.
Montrons par l'absurde que A_a n'est pas diagonalisable.
On suppose A_a diagonalisable. Alors, puisque $\mathrm{Sp}(A_a) = \{\alpha\}$, il existe une matrice inversible P d'ordre 3 telle que $A_a = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}$, c'est-à-dire $A_a = P\alpha I_3 P^{-1} = \alpha I_3$, ce qui contredit la définition de A_a.
Ainsi A_a n'est pas diagonalisable .

10. (a) D'après la question 6(a), la matrice A_a carrée d'ordre 3 possède 3 valeurs propres distinctes.
Ainsi, A_a est diagonalisable .

(b) D'après la question 8(b), $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \nu \\ \nu^2 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A_a associés aux valeurs propres distinctes λ, μ et ν respectivement. Ainsi les colonnes de P forment une famille libre.
Par conséquent la matrice, P est inversible .
De plus P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ vers une base de vecteurs propres de A_a.
Donc $A_a = PDP^{-1}$.

Partie 3

11. (a) y est solution de $(\mathscr{E}_0)$ si et seulement si y' est solution de $z'' - 3z = 0$.
L'équation caractéristique de cette équation, $r^2 - 3 = 0$, a deux solutions $r_1 = -\sqrt{3}$ et $r_2 = \sqrt{3}$.
Ainsi y est solution de $(\mathscr{E}_0)$ si et seulement s'il existe deux réels β_1 et β_2 tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad y'(x) = \beta_1 e^{-\sqrt{3}x} + \beta_2 e^{\sqrt{3}x}. \qquad (1)$$

(b) Les solutions de $(\mathscr{E}_0)$ sont donc les primitives des fonctions de la forme (1), c'est-à-dire les fonctions définies par une expression de la forme :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad y(x) = -\frac{\beta_1}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\beta_2}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}x} + \alpha_3,$$

où $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ sont des réels. Or $-\dfrac{\beta_1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\beta_2}{\sqrt{3}}$ décrivent l'ensemble des réels lorsque β_1 et β_2 décrivent l'ensemble des réels. Ainsi les solutions de $(\mathscr{E}_0)$ sont les fonctions vérifiant une relation de la forme :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad y(x) = \alpha_1 e^{-\sqrt{3}x} + \alpha_2 e^{\sqrt{3}x} + \alpha_3,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des réels.

Les candidats peuvent se contenter de la première forme sans simplifier l'écriture des coefficients.

12. Soit a un réel.

$$Y' = A_a Y \iff \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -ay + 3y' \end{pmatrix} \iff y''' = -ay + 3y' \iff y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a).$$

13. (a) On a montré à la question 10(b) que $A_a = PDP^{-1}$, donc :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a) &\iff Y' = A_a Y \iff Y' = PDP^{-1}Y \\ &\iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \iff (P^{-1}Y)' = DP^{-1}Y \\ &\iff Z' = DZ, \end{aligned}$$

où l'égalité $(P^{-1}Y)' = P^{-1}Y'$ découle de la linéarité de la dérivation.

(b) Soit $y : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction trois fois dérivable, $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $Z = P^{-1}Y$. On note $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
D'après la question précédente,

$$y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a) \iff Z' = DZ \iff \begin{cases} z_1' = \lambda z_1, \\ z_2' = \mu z_2, \\ z_3' = \nu z_3, \end{cases} \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbf{R}, \begin{cases} z_1(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, \\ z_3(x) = \alpha_2 e^{\mu x}, \\ z_3(x) = \alpha_3 e^{\nu x}. \end{cases}$$

Or $Y = PZ = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 + z_3 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3 \\ \lambda^2 z_1 + \mu^2 z_2 + \nu^2 z_3 \end{pmatrix}$, donc y est solution de $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement s'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 e^{\mu x} + \alpha_3 e^{\nu x} \\ \lambda \alpha_1 e^{\lambda x} + \mu \alpha_2 e^{\mu x} + \nu \alpha_3 e^{\nu x} \\ \lambda^2 \alpha_1 e^{\lambda x} + \mu^2 \alpha_2 e^{\mu x} + \nu^2 \alpha_3 e^{\nu x} \end{pmatrix}.$$

Ainsi y est solution de $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement s'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\forall x \in \mathbf{R}, y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 e^{\mu x} + \alpha_3 e^{\nu x}$.

(c) Dans le cas $a = 0$, les valeurs propres de A_0 sont les solutions de l'équation $x^3 - 3x = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -\sqrt{3}$, $\mu = \sqrt{3}$ et $\nu = 0$. D'après la question précédente, les solutions de $(\mathscr{E}_0)$ sont donc les fonctions définies par une expression de la forme :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad y(x) = \alpha_1 e^{-\sqrt{3}x} + \alpha_2 e^{\sqrt{3}x} + \alpha_3 e^{0.x},$$

et on retrouve bien le résultat de la question 11(b).

EXERCICE 3

Partie I. Étude d'une base de données.

1. Les attributs `id_vehicule` et `id_annonce` sont des clefs primaires des tables `vehicule` et `annonce` respectivement, car d'après l'énoncé deux enregistrements différents de la table `vehicule` ne peuvent posséder le même identifiant `id_vehicule`, et de même deux enregistrements différents de la table `annonce` ne peuvent posséder le même identifiant `id_annonce`.
   L'attribut `id_vehicule` de la table `annonce` est une clef étrangère : il permet d'associer chaque enregistrement de la table `annonce` à un unique enregistrement de la table `vehicule`.
2.
```sql
SELECT modele
FROM vehicule
WHERE marque = 'Dubreuil Motors'
```

3. Cette requête met à jour les enregistrements de la table `annonce` de la façon suivante : elle identifie l'enregistrement de la table `vehicule` associé à chaque annonce grâce à l'identifiant `id_vehicule`, et lorsque l'attribut `prix_neuf` de cet enregistrement est strictement inférieur à l'attribut `prix_occasion` de l'annonce, la valeur de `prix_occasion` est mise à jour en prenant la valeur `prix_neuf` du véhicule.
   Autrement dit, cette requête permet de plafonner le prix de vente d'occasion en s'assurant qu'il ne dépasse pas le prix neuf. La table `vehicule` n'est pas modifiée.
4.
```sql
SELECT id_annonce, km, prix_neuf, prix_occasion
FROM annonce INNER JOIN vehicule ON annonce.id_vehicule = vehicule.id_vehicule
```

Partie II. Étude de la décote.

5. On parcourt le tableau `km` pour identifier la position `i_max` d'un maximum (ici le premier rencontré), puis on affiche l'élément du tableau `rapport` situé à la position `i_max`.

```python
i_max = 0
for i in range(1,len(km)):
    if km[i] > km[i_max]:
        i_max = i
print(rapport[i_max])
```

6.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.scatter(km, rapport)
plt.show()
```

7. Non, une régression linéaire ne permettrait pas d'approcher avec précision les points du nuage, car ceux-ci ne semblent pas se concentrer autour d'une droite.
8. La seule valeur possible pour le coefficient de corrélation linéaire de la série (`km`,`rapport`) est : $-0,406$. En effet, les valeurs de `rapport` semblent dépendre de façon décroissante de celles de `km`, donc `rho` est négatif. D'autre part la valeur $-0,985$, très proche de -1, indiquerait une forte dépendance linéaire entre les deux caractères ; elle est donc incompatible avec la figure.

Partie III. Un modèle de décroissance exponentielle.

9. On a :

$$r = ae^{-cs} \iff \ln r = \ln a - cx \iff y = \alpha x + \beta\,,$$

avec $\boxed{\alpha = -c \text{ et } \beta = \ln a}$.

10. Par définition,

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \qquad s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad \text{et} \quad s_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})} \;.$$

On peut également écrire :

$$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2 \qquad \text{et} \qquad s_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}} \;.$$

11. L'équation de la droite de régression linéaire donnée dans l'énoncé peut s'écrire :

$$y = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}x + \overline{y} - \overline{x}\frac{s_{x,y}}{s_x^2}\,,$$

c'est-à-dire $y = \alpha x + \beta$, avec $\alpha = \dfrac{s_{x,y}}{s_x^2}$ et $\beta = \overline{y} - \overline{x}\dfrac{s_{x,y}}{s_x^2}$. Or d'après la question 9. $a = e^{\beta}$ et $c = -\alpha$, donc

$$\boxed{a = \exp\left(\overline{y} - \overline{x}\frac{s_{x,y}}{s_x^2}\right) \quad \text{et} \quad c = -\frac{s_{x,y}}{s_x^2}} \;.$$

12. On applique la formule de Koenig-Huygens, en calculant les moyennes respectives $\overline{xy}$, $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries $(x_i y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, et en renvoyant $\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$.

```python
import numpy as np
def covariance(x,y):
    prod = x*y
    return np.mean(prod)-np.mean(x)*np.mean(y)
```

13. On calcule les différents paramètres qui interviennent dans les expressions de a et c , en remarquant que $s_x^2 = s_{x,x}$ et $a = \exp(\overline{y} + c\overline{x})$.

```python
import numpy as np
def ajustement_exp(x, r):
        y = np.log(r)
        moy_x = np.mean(x)
        moy_y = np.mean(y)
        cov_xy = covariance(x,y)
        var_x = covariance(x,x) # variance de x
        c = -cov_xy/var_x
        a = np.exp(moy_y+c*moy_x)
        return a, c
```