CORRIGÉ
DU SUJET ZÉRO

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
VOIE ECG

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques approfondies - Sujet zéro 1 - Corrigé

Exercice 1

Partie I

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, et $A^3 = -6A$. $\boxed{\text{Ainsi il existe un réel } \alpha,\ \alpha = \sqrt{6} \text{ strictement positif tel que } A^3 = -\alpha^2 A.}$

La matrice A^2 doit être explicitée sur la copie.

2.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(g) &\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -y+2z=0 \\ x-z=0 \\ -2x+y=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=2z \\ x=z \end{cases}.
\end{aligned}$$

Un système posé et en lien avec la définition du noyau est attendu.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(g) = Vect((1,2,1)) \neq \{0_E\}$, $\boxed{\text{donc } 0 \text{ est valeur propre de } g}$, et $E_0(g) = \mathrm{Vect}\Big((1,2,1)\Big)$.

Or, $\|(1,2,1)\| = \sqrt{6}$, donc en posant : $\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1),\ v_1 \text{ est de norme 1 et } (v_1) \text{ est une base de } E_0(g).}$

L'existence d'un vecteur non nul dans le noyau doit être indiquée.

3. D'après la question 1), on a : $A^2 + 6A = 0$. Donc le polynôme : $Q(X) = X^3 + 6X$ est un polynôme annulateur de A. Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de Q.
Or, $Q(X) = X^3 + 6X = X(X^2+6)$, donc le polynôme Q admet exactement une racine réelle: 0. Donc 0 est l'unique valeur propre possible de A, donc l'unique valeur propre possible de g.

   Et d'après la question précédente, 0 est bien valeur propre de g, $\boxed{\text{donc } Sp(g) = \{0\}.}$

Les deux étapes de ce raisonnement doivent apparaître:
0 est la seule valeur propre possible puis 0 est bien une valeur propre.

4. L'endomorphisme g admet 0 comme valeur propre, donc $\boxed{g \text{ n'est pas bijectif.}}$
De plus, 0 est l'unique valeur propre de g, et $\dim(E_0(g)) = 1 < 3$, donc $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

5. $\diamond$ $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1\cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 0.$

   Donc v_2 est orthogonal à tout vecteur d'une base de $E_0(g)$. $\boxed{\text{Donc } v_2 \in (E_0(g))^\perp.}$

Le calcul du produit scalaire est attendu.

◇ Déterminons un vecteur v_3 de la forme : $v_3 = (x, y, z)$ tel que : $\begin{cases} v_3 \in (E_0(g))^{\perp} \\ v_3 \perp v_2 \\ \|v_3\| = 1 \end{cases}$.

Ainsi $\begin{cases} < v_3, v_1 >= 0 \\ < v_3, v_2 >= 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y = -z \\ x = z \end{cases}$.

Donc il existe un réel z tel que $v_3 = (z, -z, z)$.

Or $\|v_3\| = 1$, donc que $\sqrt{3z^2} = 1$. Donc en posant $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, et $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$.

La détermination des coordonnées de v_3 est une première étape importante.

Ainsi v_3 est bien un élément de $(E_0(g))^{\perp}$.

Et, la famille (v_2, v_3) est une famille orthonormale de $(E_0(g))^{\perp}$, donc une famille libre de $(E_0(g))^{\perp}$.

Or $Card(v_2, v_3) = \dim((E_0(g))^{\perp}) = 2$.

La dernière partie de ce raisonnement rentrerait pour une part importante du barème.

Donc la famille (v_2, v_3) est une base orthonormale de $(E_0(g))^{\perp}$.

6. ◇ D'après ce qui précède, (v_1) est une base orthonormale de $E_0(g)$, et (v_2, v_3) est une base orthonormale de $(E_0(g))^{\perp}$.
En concaténant ces deux familles, on obtient donc une base orthonormale de E.
Ainsi (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormale de E.

Un raisonnement efficace est attendu.
Un candidat montrant à la main que la famille est une base orthonormée se pénalise seul en perdant du temps.

◇ $v_1 \in E_0(g)$, donc $g(v_1) = 0_E$.

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -\sqrt{6}\dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $g(v_2) = -\sqrt{6}v_3$.

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \sqrt{6}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $g(v_3) = \sqrt{6}v_2$.

Ainsi $Mat_{(v_1, v_2, v_3)}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$.

L'expression de l'image de chaque vecteur est attendue.

Partie II

1. **($\Longrightarrow$)** Supposons que f vérifie $(P1)$ c'est-à-dire que $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$.
Soient x et y deux éléments de E :

$$\begin{aligned} \langle f(x+y), x+y \rangle &= \langle f(x) + f(y), x+y \rangle && \text{par linéarité de } f \\ &= \langle f(x), x \rangle + \langle f(x), y > + \langle f(y), x \rangle + < f(y), y \rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle && \text{car } f \text{ vérifie} (P1) \\ \text{Et } \langle f(x+y), x+y \rangle &= 0 && \text{car } f \text{ vérifie} (P1) \end{aligned}$$

Ainsi $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$. l'endomorphisme f vérifie la propriété $(P2)$.

($\Longleftarrow$) Supposons que f vérifie $(P2)$ c'est-à-dire $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.
Pour tout vecteur x de E, $\langle f(x), x \rangle = 0$, en appliquant $(P2)$ avec $x = y$.
Ainsi $\forall x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$. l'endomorphisme f vérifie la propriété $(P1)$.

Les propriétés $(P1)$ et $(P2)$ sont équivalentesou encore $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle \Longleftrightarrow \forall x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$.

Un raisonnement clair par double implication et détaillé est attendu.

2. Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$, alors $x = (x_1, x_2, x_3)$. Et $g\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (-x_2 + 2x_3, x_1 - x_3, -2x_1 + x_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \Big\langle g\big((x_1,x_2,x_3)\big),(x_1,x_2,x_3)\Big\rangle &= \Big\langle(-x_2+2x_3, x_1-x_3, -2x_1+x_2),(x_1,x_2,x_3)\Big\rangle \\ &= -x_1x_2 + 2x_3x_1 + x_1x_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, l'endomorphisme g vérifie $(P1)$, donc g est un endomorphisme anti-symétrique.

   Un calcul détaillé est attendu.

3. On suppose donc que f est bijective.
   Soit x un vecteur non nul de E, et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$.

   (a) Démontrons que la famille $(x, f(x))$ est libre.
   Soient deux réels α et β tels que : $\alpha x + \beta f(x) = 0_E. Alors \langle \alpha x + \beta f(x), x\rangle = \langle 0_E, x\rangle = 0$.
   Or $\langle \alpha x + \beta f(x), x\rangle = \alpha\|x\|^2 + \beta\langle f(x), x\rangle$ et $\langle f(x), x\rangle$. Donc $\langle \alpha x + \beta f(x), x\rangle = \alpha\|x\|^2$
   Ainsi $\alpha\|x\|^2 = 0$.
   Or x est un vecteur non nul. Donc $\alpha = 0$.
   Ceci entraîne que $\beta f(x) = 0$: et f est bijective et x est non nul, donc $f(x) \neq 0_E$, donc $\beta = 0$.
   Ainsi la famille $(x, f(x))$ est donc bien libre.
   Donc F est de dimension 2.

   La liberté de la famille doit être clairement établie.

   (b) F est de dimension 2, donc $F^\perp$ est de dimension 1. Soit (y) une base de $F^\perp$.
   $(x, f(x))$ est une base orthogonale de F, et (y) est une base orthogonale de $F^\perp$.
   Donc en concaténant, $(x, f(x), y)$ est une base orthogonale de E.

   Toute ébauche de raisonnement sera valorisée.

   (c) Soient α, β, γ et δ quatre réels tels que :

$$\alpha x + \beta f(x) + \gamma y + \delta f(y) = 0_E.$$

   Donc $\alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle f(x), y\rangle + \gamma\|y\|^2 + \delta\langle f(y), y\rangle = 0$. Or la famille $(x, f(x), y)$ est orthogonale, et f est anti-symétrique, donc : $\gamma\|y\|^2 = 0$.
   Comme y est non nul : $\gamma = 0$.
   Donc $\alpha x + \beta f(x) + \delta f(y) = 0_E$, alors

$$\alpha\|x\|^2 + \beta\langle f(x), x\rangle + \delta\langle f(y), x\rangle = 0,$$

   Or $\langle f(y), x\rangle = -\langle y, f(x)\rangle = 0$ et $\langle f(x), x\rangle = 0$.
   Donc $\alpha\|x\|^2 = 0$, donc $\alpha = 0$.
   Ainsi $\beta f(x) + \delta f(y) = f(\beta x + \delta y) = 0_E$, et f est bijective, donc $\beta x + \delta y = 0_E$.
   Enfin, la famille (x, y) est libre, comme sous-famille d'une base de E : donc $\beta = \delta = 0$.
   Ainsi la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

   Le raisonnement se rapprochant de celui de la question a), des justifications rapides peuvent suffire.

   (d) La famille précédente est une famille libre de quatre éléments de E. Mais E est de dimension 3, donc toute famille libre de E contient au plus 3 éléments.
   Donc l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

   Un candidat répondant correctement à cette question sans avoir abordé les précédentes ne sera pas pénalisé.

4. L'endomorphisme f n'est pas bijectif, donc son noyau contient au moins un vecteur non nul, que nous pouvons noter e.
   e étant non nul, on peut définir le vecteur e'_1 par : $e'_1 = \dfrac{1}{\|e\|}e$.
   Le vecteur e'_1 ainsi obtenu est un vecteur normé du noyau, et on peut le compléter en une base orthonormale : $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E.

   Des justifications maladroites ne seront pas pénalisées.

5. (a) Soit $j \in [\![1,3]\!]$: La base $\mathscr{B}'$ est orthonormale, donc

$$f(e'_j) = \sum_{i=1}^{3} \langle f(e'_j), e'_i \rangle e'_i.$$

Donc, en notant $A = (a_{ij})$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ a_{i,j} = \langle f(e'_j), e'_i \rangle.$$

Et d'après la propriété $(P2)$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ a_{j,i} = \langle f(e'_i), e'_j \rangle = -\langle f(e'_j), e'_i \rangle = -a_{i,j}.$$

Donc la matrice A est anti-symétrique.

Un raisonnement clair et précis est souhaité.
Une rigueur dans le choix des indices et le respect de ce choix est attendue.

(b) Tout d'abord, la matrice A est antisymétrique, donc ses coefficents diagonaux sont nuls.
Ensuite, le vecteur e'_1 est dans le noyau de f, donc la première colonne de A est nulle.
Donc, par anti-symétrie, la première ligne de A est nulle.
Donc il existe deux réels α et β tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, toujours parce-que A est anti-symétrique : $\beta = -\alpha$.

Dans la base orthonormale $\mathscr{B}'$, la matrice représentative de f est la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Des justifications rapides sont acceptées.

Exercice 2

Partie I : Étude des intégrales de Wallis

1. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

$W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = -0 + 1 = 1.$

Donc $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

Des calculs rapides sont acceptés.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n (\sin(t) - 1)\mathrm{d}t$$

Or : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, donc : $(\sin(t))^n (\sin(t) - 1) \leqslant 0$.
Par positivité de l'intégrale (les bornes de l'intégrale étant dans le bon sens), $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$.

Ainsi la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Une étude soignée du signe de l'intégrale est souhaitée.

3. $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+2} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} \sin(t)\mathrm{d}t.$

Par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto (\sin(t))^{n+1}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \Big[-\cos(t)(\sin(t))^{n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)(n+1)\cos(t)(\sin(t))^n \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))(\sin(t))^n \mathrm{d}t \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

Finalement, $W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

Les hypothèses de l'intégration par parties doivent être clairement indiquées.

◇ Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

(I) $1 \cdot W_0 \cdot W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on ait : $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } (n+2)W_{n+1}W_{n+2} &= (n+2)W_{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}W_n\right) \\ &= (n+1)W_n W_{n+1} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(C) Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Une tel raisonnement par récurrence doit être particulièrement soigné.
Une hypothèse de récurrence contenant $\forall n \in \mathbb{N}$ sera fortement pénalisée.

4. La suite (W_n) étant décroissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.
Or la fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur le segment $[0, \pi/2]$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n > 0$.
Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, autrement dit : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

La stricte positivité de W_n est attendue, la justification un peu moins.

Alors par produit : $(n+1)W_n W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2$.

Or $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Donc $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ ou encore $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ ou encore $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Des calculs propres sont attendus.

5. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

   (I) $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et par ailleurs on a bien : $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{0!}{2^0(0!)^2} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $W_0 = \dfrac{\pi}{2}\cdots\dfrac{(2\cdots 0)!}{2^{2\cdot 0}(0!)^2}$.

   (H) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

   Alors, d'après la question 3,

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2(n+1)\cdot 2(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

   (C) Donc par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

Ce raisonnement par récurrence assez classique devra être mené avec rigueur et soin.

Partie II : Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \dfrac{n!}{n^n}\cdot\dfrac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{e^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{\sqrt{n}}{e^n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot e\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\right) + \ln(e) \\ &= 1 - \left(\frac{n+1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Des calculs efficaces sont attendus.

2. (a) Au voisinage de 0,

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{u\to 0}{o}(u^3)$$

Question de cours qui doit être parfaitement traitée.

   (b)

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{12n^2} \end{aligned}$$

Donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.

Des calculs propres et efficaces sont attendus.

3. (a) La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $2 > 1$), donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{-1}{12n^2}$ converge également.

   Par critère d'équivalence de suites à termes négatifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

   Une grande rigueur et une précision dans l'argumentation sont attendues dans ce raisonnement classique.

   (b) Par définition de la convergence de la série, il existe un réel L tel que :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = L$$

   En reconnaissant une somme télescopique, $\lim_{N \to +\infty} (\ln(u_{N+1} - \ln(u_1)) = L$.

   Alors, $\lim_{N \to +\infty} \ln(u_{N+1}) = L + \ln(u_1) = L + 1$.

   Par continuité de l'exponentielle en $L+1$, $\lim_{N \to +\infty} u_{N+1} = e^{L+1}$. Donc En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n \geqslant 1}$, $\ell > 0$.

   Ainsi La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

   La dernière étape du raisonnement est attendue.

4. $\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ell$ alors $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \ell \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$.

   Or d'après la partie I, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

   Donc $W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ell \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}}}{2^{2n}\ell^2 \frac{n^{2n+1}}{e^{2n}}}$ ou encore $W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\ell\sqrt{n}}$.

   Or, $W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, donc $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\ell} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

   Ainsi $\ell = \sqrt{2\pi}$.

   Toute démarche correcte sera valorisée.

5. Ainsi$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Partie III : Étude d'une suite d'intégrales

1. (a) La fonction h est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions dérivables, et $\forall t \in [0,1],\ h'(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$. Donc $\forall t \in [0,1]$, $h'(t) \geqslant 0$. La fonction h est donc croissante sur $[0,1]$. De plus, $h(0) = 0$ et $h(1) = e^{-1}$, on a donc le tableau de variations suivant :

t	0	1
$h(t)$	0 ↗	e^{-1}

   Une étude rapide mais correcte est attendue.

   (b) Donc

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant te^{-t} \leqslant \frac{1}{e}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, 1/e]$, $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant (te^{-t})^n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

   Par positivité de l'intégrale (les bornes dans le bon sens), $0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

   Une justification de chaque étape est attendue.

(c) ⋄ Par encadrement, ($\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$) $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge vers } 0}$.

⋄ De plus, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est convergente puisque $-1 < \frac{1}{e} < 1$.

Donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} I_n \text{ converge.}}$

Tous les arguments doivent clairement apparaître.

2. (a) Soit $n \geqslant 1$. Les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes, et suivent une loi exponentielle de paramètre 1, donc une loi gamma de paramètre 1.

Par stabilité de la loi gamma, $\boxed{\text{la variable aléatoire } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ suit une loi gamma de paramètre } \sum_{k=1}^{n} 1 = n.}$

En particulier, une densité de S_n est la fonction f_n donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{t^{n-1}e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc une densité de } S_n \text{ est } f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!} & \text{si } t > 0 \end{cases}}$$

Question de cours qui doit être parfaitement traitée.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = \int_0^1 t^n e^{-tn}\mathrm{d}t$.

En effectuant le changement de variable affine $u = tn$ ($\mathrm{d}u = n\mathrm{d}t$), on a :

$$I_n = \int_0^n \left(\frac{u}{n}\right)^n e^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{1}{n^{n+1}}\int_0^n u^n e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{n!}{n^{n+1}}\int_0^n f_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{n!}{n^{n+1}}P(S_{n+1} \leqslant n).$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad I_n = \frac{n!}{n^{n+1}}P\left(S_{n+1} \leqslant n\right).}$$

Une vigilance particulière permettra de détecter toute arnaque de calcul.

(c)
```
import numpy.random as rd
def proba(n):
    N=10000
    c=0
    for i in range(N) :
        S=rd.gamma(n+1)
        if S<= n:
            c=c+1
    return c/N
```

(d)
```
def affiche(n):
    fact=1
    L=[]
    for k in range(1,n+1):
        fact=fact*k
        L.append(fact/(k**(k+1))*proba(k))
    return L
```

Tout programme d'algorithme correct sera accepté.

3. (a) Les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes, admettant une espérance, et une variance non nulle.
D'après le théorème central limite, la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X_n}$ à savoir $\dfrac{\overline{X_n} - E[\overline{X_n}]}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
Or, par linéarité de l'espérance que $E(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n}E(S_n) = \dfrac{1}{n} \cdot n = 1$.
De plus, par propriété de la variance, $V(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n^2} \cdot n = \dfrac{1}{n}$.

> Ainsi $\sqrt{n}(\overline{X_n} - 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans cette application directe du théorème central imite une attention particulière sera portée sur le rappel des hypothèsses et le calcul de l'espérance et de la variance .

(b) D'après la question 3(a) que $\overline{X_n}^* = \sqrt{n}(\overline{X_n} - 1) = \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{n}S_n - 1\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}S_n - \sqrt{n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1} \leqslant 0) &= P\left(\overline{X_{n+1}}^* + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 0\right) \\
&= P\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}S_{n+1} - \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 0\right) \\
&= P\left(S_{n+1} - (n+1) + 1 \leqslant 0\right) \\
&= P(S_{n+1} \leqslant n)
\end{aligned}$$

> Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(S_{n+1} \leqslant n\right) = P\left(Y_{n+1} \leqslant 0\right)$.

Un travail soigné sur les événements est attendu.

(c) D'après la question 2(b) : $I_n = \dfrac{n!}{n^{n+1}}P(S_{n+1} \leqslant n)$.
Or, d'après la partie II, $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
Et d'après la question 2(b), en notant Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, $P(Y_{n+1} \leqslant 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(0)$.
Or $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$. Donc, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^{n+1}} \cdot \dfrac{1}{2}$.
Or $\dfrac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^{n+1}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot \dfrac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n^{n+1}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$.

> Donc $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Tout travail sera valorisé.

Exercice 3

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k, notons B_k l'événement « tirer une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage ».
   Alors $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$. D'après la formule des probabilités composées : $isplaystyle\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i}(B_k)$.
   Or, $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{a}{a+b}$ et $\forall k \in [\![2, n]\!], \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i}(B_k) = \dfrac{a+(k-1)r}{a+b+(k-1)r}$.
   Donc $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a+(k-1)r}{a+b+(k-1)r}$. $\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+kr}{a+b+kr}.}$

   Une application correcte et détaillée de la formule des probabilités composées est attendue.

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} -\ln\left(\mathbb{P}(A_n)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{a+b+kr}{a+kr}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right) \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln\left(P(A_n)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right).}$

   Un minimum de détails dans les calculs est attendu.

3. ◇ Remarquons que si $r > 0$, alors $\ln\left(1 + \dfrac{b}{a+kr}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{kr}$ et $\dfrac{b}{kr} > 0$. Or $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge. Donc par critère d'équivalence, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$ diverge.
   Si $r = 0$, alors $\ln\left(1 + \dfrac{b}{a+kr}\right) \neq 0$. $\boxed{\text{Donc la série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right) \text{ diverge.}}$

   Un oubli du cas $r = 0$ ne sera pas sanctionné.

   ◇ Comme la la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$ diverge et que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ln\left(1 + \dfrac{b}{a+kr}\right) \geqslant 0$,
   alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right) = +\infty$.
   Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\mathbb{P}(A_n)\right) = -\infty$. $\boxed{\text{Donc } \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.}$

   Une argumentation précise est attendue.

4. Remarquons que $(X = 0) = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} \subset A_n$. Donc d'après la limite monotone, $\mathbb{P}(X = 0) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
   $\boxed{\text{Ainsi } P(X = 0) = 0.}$

   Une vérification soignée des hypothèses de la propriété de la limite monotone est attendue.

5.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX(a,b,r):
    i=1
    while rd.random()<(a+(i-1)*r)/(a+b+(i-1)*r):
        i+=1
    return i
```

Tout programme d'algorithme correct est accepté.

6.

```python
def Moyenne(a,b,r,N):
    S=0
    for k in range(N):
        S+=simulX(a,b,r)
    return S/N
```

Tout programme d'algorithme correct est accepté.

7. On suppose dans cette question que $r = 0$. X suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{b}{a+b}$.

   Donc X admet une espérance et une variance et $E(X) = \dfrac{a+b}{b}$ et $V(X) = \dfrac{a}{a+b}\dfrac{(a+b)^2}{b^2} = \dfrac{a(a+b)}{b^2}$.

   Aucune justification n'est attendue.

8. On suppose dans cette question que $a = b = r = 1$.

   (a) Soit n un entier naturel non nul.

   $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_{n-1} \cap \overline{B}_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}_{A_{n-1}}(\overline{B}_n)$. Donc $\mathbb{P}(X = n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-2} \frac{1+k}{2+k} \cdot \frac{1}{n+1}$.

   Or $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-2} \frac{1+k}{2+k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n}$. $\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}.}$

   Un raisonnement détaillé est souhaité.

   (b) Pour tout entier n non nul, $n\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{n+1}$.

   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ diverge. $\boxed{\text{Donc } X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

   La divergence de la série est attendue.

Partie II : Étude du cas $r = 1$

Dans cette partie, on pose $r = 1$ et on suppose que b est supérieur ou égal à 2.

1. On suppose de plus que $a = 1$.

   (a) Soit n un entier naturel non nul. $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_{n-1} \cap \overline{B}_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}_{A_{n-1}}(\overline{B}_n)$.

   Donc $\mathbb{P}(X = n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-2} \frac{1+k}{1+b+k} \cdot \frac{b}{n+b}$.

   Or $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-2} \frac{1+k}{1+b+k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=b+1}^{n+b-1} k} = \frac{(n-1)!\cdot b!}{(n+b-1)!}$. $\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{b\cdot(n-1)!\cdot b!}{(n+b)!}.}$

   Il est attendu des candidats une justification claire à l'aide d'événements.

(b) Soit n un entier non nul.

$$\begin{aligned}\frac{b\cdot b!}{b-1}(v_n-v_{n+1}) &= \frac{b\cdot b!}{b-1}\left(\frac{n!}{(n+b-1)!}-\frac{(n+1)!}{(n+b)!}\right)\\ &= \frac{b\cdot b!}{b-1}\cdot\frac{n!}{(n+b)!}(n+b-n-1)\\ &= \frac{b\cdot b!\cdot n!}{(n+b)!}\end{aligned}$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{b\cdot b!}{b-1}(v_n-v_{n+1})$.

(c) La suite (v_n) converge vers 0. Donc la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n-v_{n+1}$ est une série convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n-v_{n+1}=v_1=\dfrac{1}{b!}$.

Donc X admet une espérance et $E(X)=\dfrac{b}{b-1}$.

Toute ébauche de raisonnement sera valorisée.

2. Le réel a n'est plus supposé être égal à 1 mais seulement supérieur ou égal à 1.

(a) Soit a un entier non nul.

Par définition, $E(X_a|B_1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}_{B_1}(X_a=n)$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{B_1}(X_a=n)=\mathbb{P}(X_{a+1}=n-1)$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } E(X_a|B_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X_{a+1}=n-1)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\mathbb{P}(X_{a+1}=n-1)+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_{a+1}=n-1)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X_{a+1}=n)+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_{a+1}=n)\\ &= E(X_{a+1})+1\end{aligned}$$

Ainsi $\forall a\in\mathbb{N}^*,\ E(X_a|B_1)=1+E(X_{a+1})$.

Une bonne connaissance de l'espérance conditionnelle et une bonne interprétation de l'espérance conditionnelle seront appréciées.

(b) Remarquons que $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(X_a=1)=1$ et que $\forall n\geqslant 2$, $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(X_a=n)=0$.

Donc $E(X_a|\overline{B_1})=1$.

Une bonne interprétation de la probabilité conditionnelle sera valorisée.

(c) ⋄ Soit a un entier non nul.

D'après la formule de l'espérance totale,

$$E(X_a)=\mathbb{P}(B_1)E(X_a|B_1)+\mathbb{P}(\overline{B_1})E(X_a|\overline{B_1})$$

Or $\mathbb{P}(B_1)=\dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}(\overline{B_1})=\dfrac{b}{a+b}$.

Alors $E(X_a)=\dfrac{a}{a+b}(1+E(X_{a+1}))+\dfrac{b}{a+b}=1+\dfrac{a}{a+b}E(X_{a+1})$.

Une bonne connaissance de la formule de l'espérance totale sera valorisée.

- Or d'après la question 1c, $E(X_1) = \dfrac{b}{b-1}$.

  Soit a un entier non nul. Supposons que $E(X_a) = \dfrac{a+b-1}{b-1}$.

  Alors $E(X_{a+1}) = \dfrac{a+b}{a}\Big(E(X_a) - 1\Big) = \dfrac{a+b}{a}\left(\dfrac{a+b-1}{b-1} - 1\right) = \dfrac{a+b}{b-1}$.

  Donc par le principe de récurrence, $\forall a \in \mathbb{N}^*,\ E(X_a) = \dfrac{a+b-1}{b-1}$.

Un raisonnement par récurrence bien mené est attendu.

Partie III

1. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= -\ln\big(\mathbb{P}(A_{n+1})\big) - \frac{b}{r}\ln(n+1) + \ln\big(\mathbb{P}(A_n)\big) + \frac{b}{r}\ln(n) \\
&= \ln\left(1 + \frac{b}{a+nr}\right) - \frac{b}{r}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{b}{a+nr} - \frac{b^2}{2(a+nr)^2} - \frac{b}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{-ab}{rn(a+rn)} - \frac{b^2}{2(a+nr)^2} + \frac{b}{2rn^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{b}{rn^2}\left(\frac{-an}{a+rn} - \frac{-rbn^2}{2(a+nr)^2} + \frac{1}{2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-an}{a+rn} - \frac{-rbn^2}{2(a+nr)^2} + \frac{1}{2} = -\frac{a}{r} + \frac{b}{2r} + \frac{1}{2} = \frac{b+r-2a}{2r}$.

   Donc $u_{n+1} - u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

   Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge. Donc par critère de comparaison $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_{n+1} - u_n$ converge.

Une attention particulière sera portée sur l'application du critère de comparaison.
Cependant un calcul bien mené, efficace et clair est souhaité.

2. D'après le théorème des séries télescopiques, la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite.

3. Par définition de la suite (u_n), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\Big(\mathbb{P}(A_n)\Big) + \frac{b}{r}\ln(n) = -\ell$.

   Et par continuité de l'exponentielle en $-\ell$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)n^{\frac{b}{r}} = e^{-\ell}$.

   Ainsi $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ell}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$.

Un travail précis et soigné sur les limites est attendu.

4. Soit n un entier naturel non nul.
   $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_{n-1} \cap B_n) = \dfrac{b}{a + r(n-1)}\cdot\mathbb{P}(A_{n-1})$.

   Donc $n\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{bn}{a + r(n-1)}\cdot\mathbb{P}(A_{n-1})$.

   Or $b \neq 0$ et $\mathbb{P}(A_{n-1}) \neq 0$.

   Ainsi $n\mathbb{P}(X = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{r}\mathbb{P}(A_{n-1})$.

5. D'après les questions précédentes, $n\mathbb{P}(X=n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{r} \cdot e^{-\ell} \cdot \frac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$. Et $n\mathbb{P}(X=n) \geqslant 0$.

   Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$ converge si et seulement si $\frac{b}{r} > 1$.

   Ainsi X admet une espérance si et seulement si $\frac{b}{r} > 1$.

Une application rapide du critère d'équivalence est acceptée.