

**Rapport de l'épreuve de Mathématiques 2, option économique  
ESSEC, Concours 2005**

**DESCRIPTION DU PROBLÈME**

Le sujet proposé cette année était consacré à l'étude des grandes déviations sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(X_n)_n$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de loi  $\mu$ . On note  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . La loi faible des grands nombres affirme que lorsque  $\mu$  admet un moment d'ordre 2, la moyenne empirique  $S_n/n$  converge en probabilité vers l'espérance  $m$  de  $\mu$ .

L'objet des grandes déviations est de préciser de manière quantitative ce comportement asymptotique. Les résultats principaux ont été obtenus dans les années 1930, essentiellement par Kintchine et Cramer. Ils consistent à une majoration du type

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nH(m,\varepsilon)}$$

où  $H$  est une fonction dépendant de  $\mu$  (la transformée de Cramer). Ainsi la vitesse de convergence est-elle d'ordre exponentiel.

Le problème se décompose en deux parties indépendantes. La première est consacrée à l'exemple du cas discret de la loi binomiale, la seconde partie consiste à démontrer des résultats analogues dans le cas continu d'une loi Gamma de paramètre  $\alpha$  réel.

**Remarques générales**

Ce sujet est conforme au programme des classes préparatoires aux études commerciales, option économique, et bien que ne traitant que deux exemples et non le cas général, est sans doute une bonne introduction à l'esprit de la formation dispensée ensuite à l'ESSEC. Au vu de la correction, il reste néanmoins difficile pour une très large partie des candidats qui ne semblent pas aptes à traiter des questions trop générales.

Les candidats de la voie économique possèdent en majorité un bac ES et semble « venir de très loin » en mathématiques. Le programme de mathématiques des classes préparatoires aux études commerciales, voie économique, est, semble-t-il, aujourd'hui trop ambitieux pour la majorité des candidats de cette section qui présentent les concours des plus grands écoles. Cela doit interpeller ces écoles sur le rôle des épreuves de mathématiques dans cette section (essentiellement par rapport à la voie scientifique) et sur le profil des élèves qu'elles souhaitent recruter. Bien que théorique dans sa nature, j'estime qu'en dehors des inégalités trop difficiles à gérer, le reste du problème est au niveau de ce qu'une grande école de commerce peut demander à ses candidats.

Il faut malheureusement remarquer qu'à quelques exceptions près, les candidats ne maîtrisent de manière fondamentale aucune des notions abordées dans ce problème.

Certaines questions très simples sont révélatrices du peu d'exigence et des lacunes de cours des candidats. Rappelons que pour obtenir les points d'une question, les théorèmes utilisés doivent être énoncés, leurs hypothèses doivent être vérifiées dans le cadre de la question, avant de pouvoir appliquer leur conclusion. Il faut que le candidat fasse suffisamment d'efforts (en particulier sur la justification) pour mettre en forme sa solution pour espérer se voir accorder les points des questions résolues. Rien ne sert d'accumuler les questions afin d'en faire un maximum si celles-ci ne sont pas correctement résolues.

La majorité des candidats ont traité la première partie et la première moitié de la seconde partie, parfois partiellement en essayant de terminer le sujet. Le barème a permis un étalement des notes entre 0 et 20, cette dernière note restant néanmoins très exceptionnelle. Le sujet semble sélectif.

## Bilan détaillé de la correction

### Questions préliminaires

L'objet de cette question était de tester la connaissance des hypothèses d'utilisation de la loi faible des grands nombres. Elle a été très mal traitée, la très grande majorité des copies ne citant pas les dites hypothèses. Cette question a, semble-t-il, déstabilisé une partie des candidats.

Dans la seconde question, de nombreux candidats ne font pas la différence entre  $]m - \delta, m + \delta[ \subset \bar{A}$  et  $]m - \delta, m + \delta[ = \bar{A}$ .

### Partie I

Q1. a) Bien qu'élémentaire, cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Quelques aberrations comme  $E(e^{sX}) = e^{sE(X)}$ , par linéarité, ou  $E(e^{sX}) = pe^s$ .

Q1. b) Cette question aurait pu être réunie à la précédente car, parfois, le calcul de l'objet montre son existence.

Q2. a) Peu d'erreurs mais oubli de l'indépendance dans la justification.

Q2. b) Quelques difficultés à exprimer la loi de  $S_n/n$ . On voit  $S_n/n(\Omega) = [0, 1]$ .

Q2. c) Soit bien traitée, soit non traitée.

Q3. a) Les justifications font souvent défaut. On procède parfois par « bidouillage » et sans justification pour montrer les inégalités.

Q3. b) Traitée correctement par presque tous les candidats.

Q4. a) et b) Des erreurs de calcul. De grosses difficultés pour trouver le signe de la dérivée. On ne justifie pas que  $\ln\left(\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right) > 0$ , de même que  $h(a, p) > 0$ .

Q4. c) Cette question, trop fine et trop théorique, n'est manifestement pas du niveau des candidats. Aucun candidat n'a réussi à la traiter correctement.

Q5. a) Assez bien dans l'ensemble.

Q5. b) Remarques identiques à celles de la question 4. c) (c'était d'ailleurs la même question).

Q6. a) Ceux qui ne se sont pas découragés arrivent à décomposer l'événement pour arriver au résultat demandé.

Q6. b) On pouvait traiter cette question sans utiliser le a). Certains l'ont fait.

Q7. a) On arrive à des questions familières. Bien traitée.

Q7. b) Correct malgré quelques erreurs de calcul.

Q8. a) On pense au théorème de la limite centrée, mais on n'évoque pas ses hypothèses.

Q8. b) Bien traitées par quelques candidats qui montrent qu'ils sont capables de présenter des démonstrations de cours.

### Partie II

Q1. Très décevant en général. De trop nombreux candidats pensent que  $\alpha$  est un entier naturel alors que c'est un réel. Très peu pensent à étudier la convergence de l'intégrale en 0 et se contentent de  $+\infty$ . Pas d'évocation de la continuité de  $t \mapsto e^{\alpha-1}e^{-t}$  sur  $]0, +\infty[$ .

Q2. L'intégration par parties sur une intégrale impropre se fait à l'aide d'un théorème précis qu'il faut utiliser.

Q3. Bien dans l'ensemble.

Q4. a) Bien.

Q4. b) Beaucoup de candidats pensent que si  $S_n$  suit une loi  $\gamma(n\alpha)$ , alors  $S_n/n$  suit une loi  $\gamma(\alpha)$ .

Q5. a) Très fantaisiste. Résultat correct dans quelques copies seulement.

Q5. b) On trouve trop souvent que  $\varphi$  est positive, puisque c'est une espérance !

Q5. c) Même si la question équivalente de la première partie a été traitée, celle-ci est le plus souvent blanche.

Les questions suivantes n'ont quasiment jamais été abordées en dehors de la question 9. a) pour espérer récupérer un point.