

## MATHEMATIQUES 2

### Option Economique

Elodie MASSART

#### DESCRIPTION DU SUJET

Le sujet se présentait comme une variation sur le thème des inégalités de couplage. Le premier problème permettait de tester les connaissances des candidats sur les variables aléatoires discrètes tandis que le second portait sur les variables aléatoires continues et servait également de prétexte à la vérification de la solidité des candidats en analyse.

Soient  $P$  et  $Q$  deux probabilités sur un ensemble discret  $\mathcal{K}$ , fini ou bien égal à  $\mathbb{N}$ , on définit la distance en variation entre  $P$  et  $Q$  par

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

Le premier problème consistait tout d'abord dans la partie I à montrer que

$$D(P, Q) \leq P(X \neq Y)$$

pour  $X$  et  $Y$  respectivement de loi  $P$  et  $Q$ . On peut démontrer (voir le sujet partie III de la voie B/L) que cette inégalité est optimale en construisant un couple  $(X, Y)$  réalisant l'égalité.

La partie II donnait l'ordre de grandeur de la distance en variation entre la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{\lambda}{n}$  et la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et permettait aussi de retrouver le résultat de convergence en loi du cours.

Le second problème visait à montrer que

$$E((Y - X)^2) \leq 2K(f, \varphi)$$

pour  $X$  variable aléatoire de loi normale centrée et réduite,  $Y$  une variable aléatoire bien construite de loi exponentielle de paramètre 1 et  $K$  jouant un rôle de distance entre  $f$  et  $\varphi$ . Cette inégalité, dite de transport vaut en fait pour une densité autre qu'exponentielle. Le cas exponentielle permettait une construction particulièrement simple et explicite pour  $Y$ .

#### Remarques générales

Beaucoup de candidats ont semblé décontenancés par le début du sujet. L'explication semble résider dans deux facteurs bien distincts. Pour une part la mise en place théorique du début du Problème 1 a peut-être effrayé certains candidats qui n'ont dès lors pas réalisé que bon nombre de questions étaient à leur portée. Cependant, la difficulté présumée du début de l'épreuve seule ne peut justifier l'ampleur des erreurs observées. Il faut donc évoquer ici un second facteur qui est l'extrême faiblesse en mathématique d'une partie des candidats: dans pratiquement un tiers des copies, les bases du calcul et les principes du raisonnement ne sont pas maîtrisés.

A l'inverse, le nombre important de bonnes et même de très bonnes copies révèle la qualité d'une proportion non négligeable d'élèves de la voie économique. Cette dualité nécessite la

conception d'un sujet qui soit tout à la fois progressif et sélectif notamment pour permettre de discriminer finement au sein de la population des candidats les plus faibles. Le sujet de cette année a permis d'étalonner valablement un grand nombre de candidats y compris les plus brillants.

## Bilan détaillé de la correction

### Problème 1

#### Partie I

Q1 Beaucoup oublient que  $p_0 = 1 - p_1$  et  $q_0 = 1 - q_1$ .

Q2 Question très mal traitée, car l'inégalité triangulaire est ignorée en devenant souvent  $|p_k - q_k| \leq |p_k| - |q_k| \dots$  on note même des confusions avec des séries géométriques en confondant  $p_k$  avec  $p^k$ .

Q3-4-5 En général question mal traitée car la notion de valeur absolue n'est pas maîtrisée.

Q6 Quelques bonnes copies sur cette question.

Q7 Question très peu traitée.

Q8 Beaucoup de candidat ont pensé que  $X$  et  $Y$  étaient deux variables aléatoires indépendantes.

#### Partie II

Q1 C'était une question de cours ! mais l'indépendance des  $Y_i$  est souvent omise et un nombre non négligeable de candidats ne savent pas sommer correctement  $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{n}$ .

Q2 Certains se contentent de remarquer que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

Q3 Raisonnement souvent bien mené lorsque la question est abordée mais à nouveau l'indépendance des  $X_i$  est souvent omise pour conclure à une loi binomiale.

Q4 Soit bien traitée soit non traitée.

Q5-6 Les inclusions d'événements sont rarement explicitées et les lois de Morgan ne sont pas évoquées.

Q7 Les candidats reconnaissent le résultat du cours mais ne savent pas l'énoncer

correctement. On lit souvent la loi binomiale  $n$  et  $\frac{\lambda}{n}$  « ressemble » à la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

### Problème 2

#### Partie I

Q1 C'est une question de cours souvent mal traitée.

Q2 Beaucoup ne pensent pas à utiliser  $\Phi^{-1}$  et à distinguer les cas selon le signe de  $x$ .

Q3 a. Beaucoup de candidats ne remarquent pas que  $1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$ .

Q3 b. Des difficultés pour trouver la minoration malgré l'indication donnée.

Q3 c. Quelques candidats concluent encore par passage à la limite et oublient d'évoquer le théorème d'encadrement.

Q3 d. Beaucoup démontrent que  $g(x) - \frac{x^2}{2} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$  pour conclure sur l'équivalence.

## Partie II

Q1 Si la continuité est souvent assez bien traitée beaucoup oublient de montrer que  $h$  est à valeurs dans  $[0, +\infty[$ .

Q2 Le calcul de  $g'(x)$  est souvent correct mais beaucoup oublient de justifier que  $g(x) > 0$  pour calculer  $f(g(x))$ .

Q4 La plupart des candidats qui évoquent la formule de transfert omettent de préciser qu'il y a absolue convergence.

La fin n'a été traitée que dans quelques copies avec une assez bonne maîtrise des équivalents.