

## RAPPORT D'ÉPREUVE

### Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,00 et un écart-type de 5,71, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

### Commentaires particuliers

#### Exercice 1

Cet exercice d'algèbre linéaire avait pour but d'étudier un ensemble de matrices codiagonalisables, puis de l'appliquer à l'étude de trois suites récurrentes linéaires imbriquées. Il permettait de vérifier la bonne maîtrise des concepts d'algèbre au programme, et les premières questions ont été dans l'ensemble traitées par la plupart des candidats.

Il est regrettable que les candidats ne lisent pas vraiment l'énoncé des questions, et parfois se lancent dans des calculs longs et compliqués, alors même que des méthodes plus adéquates auraient été préférables s'ils avaient pris la peine de bien lire la question posée, par exemple pour la question 2 de la partie A.

#### Partie A

1. Cette première question a dans l'ensemble été malmenée par les candidats. Sa résolution n'étant pas indispensable pour la suite de l'exercice, cela n'a pas forcément gêné les candidats pour la suite du sujet. La majorité des candidats a souhaité démontrer la caractérisation des sous-espaces vectoriels par la stabilité par combinaison linéaire, souvent confondue avec la « linéarité », mais sans toutefois aboutir. Néanmoins, lorsque les candidats avaient établi une famille génératrice de  $E$ , ils sont alors bien enclins à vérifier la liberté de la famille pour achever la question.
2. Beaucoup de candidats ont cherché à trouver les valeurs propres de la matrice en étudiant la matrice  $A - \lambda I$ , alors même que le résultat était donné dans l'énoncé; cela a souvent donné lieu à de nombreux calculs, souvent erronés.

Il est toujours regrettable que les candidats n'arrivent pas à formuler clairement les conditions suffisantes de diagonalisation d'une matrice.

3. Question bien abordée par une majorité de candidats. Il est dommage que la condition sur la première ligne ait amené parfois à des erreurs de calculs, par exemple la colonne propre  $(-1, 1, 2)$  devenant  $(1, -1, 2)$ .
4. Les candidats utilisent souvent une méthode de résolution de système comme attendu dans le problème. Certains candidats appliquent la méthode de Gauss-Jordan, mais se perdent dans leurs calculs sans forcément aboutir même en cas de bon démarrage. La matrice  $P$  étant souvent fautive, les calculs de  $P^{-1}$  devenaient alors compliqués.
5. Les calculs des  $BX_i$  sont souvent réalisés, sans être forcément interprétés. Peu de candidats ont fait le lien avec la question 2 en mentionnant que la famille de vecteurs était libre (et non pas uniquement car il s'agissait de vecteurs propres).
6. Peu de candidats abordent la question, et dans ce cas répondent de manière assez confuse sans raisonnement réellement abouti.
7. Le lien entre les matrices  $M(x, y)$  et  $D(x, y)$  n'est pas exploité. Une part non négligeable de candidats indique que les coefficients diagonaux de la matrice  $M(x, y)$  doivent être non nuls.
8. De nombreux candidats ont traité cette question, même sans avoir traité les précédentes. Ils ont calculé avec succès les matrices  $A^2$  et  $B^2$ , puis ont tenté de les écrire sous la forme  $M(x, y)$  en justifiant si cela était possible ou non.

### Partie B

2. La majorité des candidats trouve la matrice  $C$ , puis posent un système linéaire pour trouver les réels  $x$  et  $y$  demandés, mais peu raisonnent pas équivalence en justifiant que  $(x, y) = (1, 3)$  convient pour toutes les équations.
3. Les candidats ont pour la plupart raisonné par récurrence, et la rédaction était correcte en général.
4. La question est peu abordée, découlant des résultats de la partie A. Des candidats ont compris néanmoins l'idée et ont écrit l'égalité  $M(x, y) = P(D(x, y))^n P^{-1}$ .

### Exercice 2

Cet exercice mêlant Analyse et Probabilités avait pour but d'étudier une suite de variables aléatoires à densité. L'exercice était plutôt long et de niveau plus difficile et demandait du temps aux candidats désireux de l'aborder entièrement. Les résultats étaient donnés dans le sujet pour les questions plus délicates, ce qui permettait d'avancer sereinement dans l'exercice en admettant certains résultats.

L'exercice a mis en valeur des problèmes de calculs en analyse, souvent dus à un manque de rigueur. Les candidats qui ont fait l'effort de bien apprendre leur cours pouvaient tout à fait gagner des points en appliquant les bonnes démarches, même sans forcément les aboutir.

1. (a) La dérivée de la fonction n'est pas toujours correcte, les étudiants confondant  $-\frac{2x+2}{(x+1)^4}$  et  $\frac{-2x+2}{(x+1)^4}$ , ce qui a amené certains à des variations fausses.  
 La limite était souvent correcte, de même pour l'équation de la tangente (dont l'orthographe est malheureusement souvent baffouée). Il est malheureux que certaines courbes laissent penser à une asymptote verticale en  $x = 0$ .
- (b) Même si beaucoup de candidats mentionnent la dérivabilité par opérations, il est attendu des candidats qu'ils énoncent précisément qu'on a affaire à un quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais.  
 La dérivée était difficile à calculer, due à la présence d'une composée multiple, mais plusieurs s'en sortent convenablement. Le résultat étant donné pour les variations, certains candidats ont pu avancer lorsqu'ils savaient résoudre l'inéquation présente dans l'énoncé.  
 La limite n'a pas été étudiée très rigoureusement. Les meilleurs candidats l'ont quand même fait

- souvent par changement de variable. Les étudiants utilisant l'équivalent  $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$  qui n'est pas explicitement au programme, n'ont pas obtenu la totalité des points s'ils ne justifiaient pas cet équivalent.
- (c) Le calcul du maximum a été correct dans les copies qui avaient répondu correctement à la question (b). Pour la limite, les candidats ont cru souvent reconnaître une expression du type  $q^n$  avec  $q$  réel fixé. Il était attendu des candidats un passage à l'écriture exponentielle avant de conclure.
- (d) La méthode est bien connue par les candidats (à savoir montrer que le quotient tend vers 0), mais sa mise en oeuvre a été peu réalisée.
2. (a) La continuité est souvent oubliée. Là-encore on peut regretter que beaucoup de candidats ne lisent pas la question en entier avant de l'aborder : certains ont démontré la convergence avec un critère de comparaison, puis ont calculé l'intégrale, alors même que l'intitulé complet de la question aurait pu les guider vers une méthode plus rapide.
- (b) Les intégrales de Riemann sont mal maîtrisées en ce qui concerne les bornes, un nombre non négligeable de copies indique que «  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$  converge ». Le critère de négligeabilité n'est pas souvent bien énoncé, la positivité des fonctions en vigueur n'est pas mentionnée, au mieux on cite un « critère de comparaison ».
- (c) Il est rappelé que toute intégration par parties doit être réalisée sur une intégrale sur un segment d'après le programme. Les rares candidats réalisant une intégration par parties sur une intégrale généralisée directement n'obtiennent aucun point à la question. Il est regrettable que même si certains candidats comprennent la nécessité de se ramener à un segment, ils confondent alors  $I_{n+1} = [\dots]_0^A - \int_0^A \dots$ .
- (d) Question bien abordée par une majorité de candidats, souvent par récurrence.
3. (a) Question bien abordée par une majorité de candidats. Les définitions sont bien connues.
- (b) Les candidats ont souvent la bonne démarche et étudient la convergence (absolue) de la bonne intégrale. Très peu ont su aller au bout du raisonnement.
- (c) Réponse souvent donnée sans justification.
- (d) Certains candidats ont confondu les intégrales  $\int_0^{+\infty}$  et  $\int_0^x$ .
- (e) Cette question difficile a été résolue uniquement par certains rares candidats.
- (f) Suivant l'indication de l'énoncé, certains candidats ont compris qu'il fallait sommer la relation précédente, même sans avoir répondu à la question (e).
- (g) Très peu abordée.
- (h) Très peu abordée.
4. (a) Certains candidats confondent les variables discrètes et continues, il n'a donc pas été rare de voir que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ .
- (b) Question bien traitée par les candidats l'ayant abordée.
- (c) Question bien traitée par les candidats l'ayant abordée.
- (d) Cette question a été abordée par un grand nombre de candidat, et a été globalement bien faite, même par des candidats de niveau faible.
- (e) La régularité de la fonction  $H_n$  n'a pas été justifiée lorsqu'elle était mentionnée. Les candidats ont dans l'ensemble bien compris comment obtenir une densité de  $Y_n$  en dérivant  $H_n$ .
- (f) La loi est reconnue par sa fonction de répartition dans très peu de copies.

### Exercice 3

Ce troisième exercice a souffert de sa position dans le sujet et a été très peu abordé par les candidats, alors même qu'il était plutôt court. Les candidats ont sans doute manqué de temps après le deuxième exercice, ou été surpris par les questions d'informatique.

Rappelons encore une fois que l'informatique représente une part non négligeable du programme des deux années de classes préparatoires. Les questions proposées dans les sujets sont souvent élémentaires et bien rémunérées lors de la correction, ce qui doit encourager tout candidat à aborder les parties du sujet portant sur les connaissances en Scilab. Il n'a pas été rare de voir des candidats de niveau plutôt moyen par ailleurs aborder l'exercice 3 raisonnablement, leur faisant ainsi augmenter considérablement leur note finale.

1. Cette question est souvent abordée par les candidats, mais peu ont bien compris les définitions proposées par l'énoncé, ou encore confondent les indices  $i$  et  $j$  dans leurs calculs.
2. La formule des probabilités totales est souvent évoquée, mais pas souvent écrite convenablement, les candidats utilisant souvent des systèmes complets d'événements finis.
3. (a) Les candidats ont souvent l'idée d'écrire  $\langle r \leq \dots \rangle$  mais le membre de droite n'est pas forcément correct.  
(b) Les candidats ayant pris peine de comprendre la modélisation proposée par l'exercice ont su correctement répondre à cette question et ont alors gagné des points.  
(c) La ligne pour  $\text{loiY}$  est faite correctement mais peu ont compris la dernière ligne.  
Il y avait une erreur d'énoncé dans le sujet original (rectifiée dans le rapport) dans l'écriture de la matrice  $\text{loiXY}$ , erreur qui a peu perturbé les candidats, la plupart ayant rectifié d'eux-mêmes sur leur copie.  
(d) Les candidats ayant abordé la question l'ont fait avec succès, sans forcément justifier leurs résultats, sûrement par manque de temps.
4. Les candidats ayant traité cette question l'ont souvent fait avec succès, au moins pour les questions (a), (b), (c).