

MATHÉMATIQUES II

Option économique

1 Le sujet

L'objet du problème est l'étude d'un paradoxe dans un jeu de « pile » ou « face », attribué à *Walter Penney (1969)* : deux joueurs s'affrontent, l'un pariant sur la configuration « pile, pile, face », l'autre sur la configuration « face, pile, pile » ; le problème montre que le deuxième a deux fois plus de chances de gagner que le premier, alors que les temps d'attente des deux configurations suivent la même loi de probabilité et, de ce fait, possèdent la même espérance.

Le problème se compose de quatre parties :

- la première partie, tout en utilisant des outils classiques d'analyse, a pour but de montrer que, si la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} est dérivable à gauche en 1, cette variable aléatoire admet une espérance donnée par la dérivée de la fonction génératrice en 1 ;
- la deuxième partie étudie la loi du temps d'attente de la configuration « pile, pile, face » et calcule son espérance ;
- la troisième partie prouve que les deux temps d'attente des deux configurations suivent la même loi et calcule les probabilités de gagner de chacun des deux joueurs ;
- la quatrième partie propose au candidat un programme PASCAL qui est, en fait, une simulation du jeu, à lui de le découvrir et d'expliquer son fonctionnement.

Les poids respectifs des parties dans le barème sont 14%, 39%, 36%, 11%.

Le problème est assez long, comportant de nombreuses questions qui sont des applications directes du cours, devant ainsi permettre aux candidats d'utiliser efficacement leurs connaissances.

Par ailleurs, comme les années précédentes, il est souvent fait appel au bon sens des candidats.

2 Les résultats obtenus

La mauvaise surprise de cette année est le constat d'un grand nombre de très mauvaises copies (plus de 6% des copies ont moins de 2 points sur 20), où le candidat donne l'impression de ne pas avoir étudié le programme en vigueur et se permet de n'écrire que des inepties.

La moyenne des notes obtenues par l'ensemble des copies est sensiblement égale à celle de l'année précédente, l'écart-type un peu plus fort, et la répartition des autres notes est semblable à celle des autres années (environ 1,75% des copies ont obtenu 20).

La moyenne de la totalité des copies corrigées est 8,3 et l'écart-type est 4,8

(respectivement 10,72 et 4,64 pour les candidats à HEC, 9,26 et 4,61 pour les candidats à ESCP-EAP, 8,33 et pour les candidats à EML).

Toutes les questions du problème ont trouvé leur réponse, mais évidemment, pas toutes dans la même copie et il arrive souvent de voir, dans une même copie, une réponse très pertinente à une question non « triviale », suivie ou précédée d'erreurs élémentaires que le simple bon sens aurait dû empêcher.

Un candidat a obtenu 20, par exemple, en traitant les questions 1, 2.a), 2.b), de la première partie, les deux tiers de la deuxième partie, la moitié de la troisième partie et la quatrième partie.

3 Commentaires détaillés

Partie I

Cette partie fait appel à des connaissances élémentaires mais précises du cours d'analyse que ne possèdent pas un nombre non négligeable de candidats et où ils se sont donc piégés eux-mêmes.

On peut y relever de nombreuses erreurs élémentaires dont voici les plus fréquentes :

- les nombres a_n sont positifs car la variable aléatoire est à valeurs dans \mathbb{N} ;
- la série de terme général $a_n x^n$ est une série géométrique (bien connue) ;
- la série de terme général x^n est une série de Riemann ;
- $0 \leq a_n x^n \leq 1$ donc la série converge ;

- $0 \leq a_n x^n \leq x^n$ donc $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ converge donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ converge ;

- confusion entre la positivité et la stricte positivité, confusion entre les inégalités $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq x < 1$;

- la fonction $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est rationnelle donc dérivable et sa dérivée est $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} k x^{k-1} \right)$;

- $g(x+1) - g(x) \geq 0$ donc g est croissante ;

- la série $a_n x^n$ est croissante ; la série a_n est bornée ; $f'(1)$ converge ;

- confusion entre croissance et positivité ;
- le théorème d'encadrement, appelé aussi « théorème des gendarmes » est donné comme argument miracle dès qu'apparaît une double inégalité, la plupart des candidats n'en connaissent donc que le nom (approximatif) ;
- une fonction majorée et convergente est croissante ;
- la quasi-totalité des candidats ignorent qu'une fonction croissante et majorée possède une limite à gauche en chaque point.

Partie II et III

Dans ces deux parties, toutes les questions ont été largement traitées par une bonne proportion de candidats qui les ont donc trouvées à leur portée.

Les erreurs élémentaires touchent ici plus particulièrement le domaine des probabilités :

- les événements B_n sont incompatibles ;
- la probabilité d'une réunion est la somme des probabilités ;
- la suite (u_n) est décroissante ;
- confusion entre la stricte croissance et la croissance ;
- confusion entre l'indépendance et l'incompatibilité des événements ;
- confusion entre événements et probabilités : intersection de probabilités, complémentaire d'une probabilité, événement égal à un nombre, même notation pour un événement et sa probabilité au mépris de l'énoncé ;
- ignorance de la définition de l'incompatibilité de deux événements ;
- ignorance de la formule des probabilités totales, systèmes complets d'événements fantaisistes ;
- des variables aléatoires suivant la même loi de probabilité sont égales ou « identiques » ;
- fausses démonstrations par récurrence : l'hypothèse de récurrence n'est pas utilisée ou l'hérédité est considérée comme évidente ;
- tours de prestidigitation sur les indices de sommations pour arriver faussement au résultat demandé ;
- erreurs élémentaires dans les calculs et tentatives de dissimulation de ces erreurs ;
- une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 est convergente.

Enfin il est à regretter le manque d'esprit critique de beaucoup de candidats vis à vis de leurs résultats : un risque nul dans un jeu ou une variance nulle ne leur paraît pas déraisonnable et ils ne craignent pas d'écrire à quelques lignes d'intervalle des phrases contradictoires.

Partie IV

Cette partie a été efficacement traitée par près de 20% des candidats (14% des candidats ont même obtenu la totalité des points), ce qui est assez satisfaisant.

En définitive, l'impression générale est que ce problème a été largement compris et il est dommage que des erreurs élémentaires trop fréquentes, y compris dans les meilleures copies, aient pénalisé les scores de la plupart d'entre elles.

La rédaction est parfois médiocre : justifications absentes, insuffisantes, trop concises, peu claires ou rédigées dans un jargon obscur, confusion de termes, hypothèses des théorèmes utilisés non vérifiées.

La présentation est généralement bonne, seule une petite minorité de copies ressemble à des brouillons.

4 Recommandation aux futurs candidats

Ce sont les mêmes que les années précédentes.

La première recommandation qui s'impose est d'apprendre son cours parfaitement et de consulter régulièrement le programme officiel du concours afin de connaître précisément le sens des mots employés et les outils à sa disposition.

La deuxième recommandation est de se munir de son bon sens et de réfléchir avant d'écrire : le but du jeu n'est pas de répondre vite et n'importe quoi.

Par ailleurs, il est important de lire l'énoncé de bout en bout afin d'en comprendre le fil conducteur, d'en repérer les articulations et d'éviter d'utiliser une hypothèse hors de son domaine de validité. De plus, il est fréquent que le libellé de certaines questions permettent de confirmer ou, au contraire, d'infirmer le résultat obtenu dans une question précédente : ne pas se priver de ce moyen d'auto-correction et ne pas hésiter, le cas échéant, à revenir en arrière.

S'il est inutile de recopier l'énoncé (c'est même un gaspillage de temps et d'énergie), une paraphrase de l'énoncé n'apporte pas davantage de points : vérifier que la réponse à chaque question est porteuse d'une information supplémentaire.

Si le « grappillage » des points dans des questions isolées n'est pas une faute, il est rarement payant : il est à la fois plus efficace et plus satisfaisant intellectuellement d'essayer de saisir les liens logiques et la cohérence qui existent entre les questions d'une même partie, et donc d'essayer de les traiter ensemble même si l'on se voit obligé d'admettre les résultats de quelques unes d'entre elles.

Soigner non seulement la présentation de sa copie, mais aussi sa rédaction en s'efforçant d'utiliser une argumentation précise, limpide, convaincante et concise : mieux vaut ne rien écrire qu'une sottise.

Enfin les tentatives de bluff ou de dissimulation sont toujours lourdes de conséquences, non seulement pour la question en cours (qui n'apporte plus de points), mais aussi pour le reste de la copie car, alors, tout autre résultat sera considéré avec méfiance et apprécié avec plus de sévérité.