RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2007
(Option Économique)

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité des connaissances exigées en classe préparatoire. Le sujet balayait largement le programme en donnant une place importante aux probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet abordable et sélectif : les bons et très bons candidats pouvaient facilement faire la différence, notamment en traitant l'exercice 2 (technique) et les questions d'informatique du problème, tandis que les candidats de niveau moyen pouvaient tout de même tirer leur épingle du jeu en traitant, au moins en partie, les exercices 1 et 3 ce qui leur permettait de montrer qu'ils avaient travaillé sérieusement les mathématiques. Quelques correcteurs signalent qu'un nombre non négligeable de candidats ont eu le temps de traiter l'essentiel.

• L'exercice 1 se fixait pour but de déterminer noyau, image et sous-espaces propres de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $M + {}^tM$.

• L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités, se proposait de montrer sur un exemple que deux variables aléatoires à densité non corrélées peuvent ne pas être indépendantes.

• L'exercice 3 avait pour objectif de d'étudier une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f, puis d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

• Le problème, portant sur le programme de probabilités, s'intéressait à deux variables aléatoires X et Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: Z qui était le temps d'attente du premier pile dans une succession de lancers d'une pièce équilibrée et, si Z avait pris la valeur k, X qui était le numéro de la boule extraite d'une urne remplie de boules portant les numéros $1, 2, \ldots, k$

Statistiques :

Pour l'ensemble des 2870 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,60 sur 20.

38 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (presque la moitié d'entre eux ayant une note inférieure à 4).
19 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.

25 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Analyse des copies :

Les correcteurs constatent cette année encore que les candidats savent appliquer les techniques classiques étudiées pendant les deux années de classe préparatoire, mais manquent de rigueur dans leurs démonstrations (notamment pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, pour calculer des limites non usuelles, pour analyser correctement un événement afin d'en déduire sa probabilité, pour justifier la classe C^1 de la fonction F de l'exercice 3, pour déterminer la matrice de φ à l'exercice 1, pour justifier la convergence d'une série, etc). Remarquons que, cette année encore, de nombreux candidats semblent ignorer comment s'écrit réellement la formule des probabilités totales !

La présence renforcée des probabilités (exercice 2 et problème) a mis en valeur le manque de préparation des candidats dans ce domaine où il faut plus raisonner qu'appliquer des recettes prêtes à l'emploi.

La relativement bonne moyenne obtenue à l'exercice 1 montre que beaucoup de candidats maîtrisent, malgré tout, les notions de base en algèbre linéaire.

L'exercice 2 a révélé certaines failles dans les connaissances de certains candidats sur les variables à densité (le cours sur la loi normale centrée réduite n'est pas toujours su et la confusion entre deux variables suivant la même loi et deux variables égales est très fréquente).

L'exercice 3 a, dans l'ensemble, été correctement traité sauf la dernière question qui nécessitait de minorer finement une intégrale.

Comme d'habitude avec les études de variables aléatoires discrètes, le problème a montré que trop peu de candidats maîtrisent les formules classiques ainsi que la façon de les appliquer. La réflexion en profondeur a souvent été délaissée au profit d'un plagiat de l'énoncé lorsque celui-ci donnait le résultat qu'il fallait trouver, notamment aux questions 4a) et 4b). L'investissement des candidats sur la partie informatique du programme semble encore faible.

Les copies sont, pour la plus grande part, bien présentées, propres et honnêtes (une majorité de candidats précisent clairement qu'ils admettent le résultat d'une question non traitée), mais les correcteurs ont constaté (comme d'habitude) que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, de trop nombreux candidats trichent en essayant de faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé : qu'ils sachent que ceci est vite repéré et sévèrement sanctionné.

Voici une liste des quelques fautes les plus fréquentes (chacune d'entre elles a été trouvée sur un nombre significatif de copies) commises cette année:

Exercice 1

- La formule du rang ne s'écrit pas $\dim \varphi = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$. Le cours ne définit pas le nombre "$\dim \varphi$".
- Certains candidats pensent que, comme $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{vect}(E_1, E_2\ E_3, E_4)$ alors cette famille est une base de $\operatorname{Im} \varphi$.
- Une erreur vue souvent : la matrice de φ, endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

- Certains candidats pensent que la linéarité de l'espérance permet d'écrire $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Une primitive fantaisiste : une primitive de $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Trop de candidats confondent $E(X^2)$ et $V(X)$.
- Certains candidats pensent que, si $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, alors X et Y sont indépendantes…

Exercice 3

• Une limite correcte mais mal justifiée : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln x} = 0$ par croissances comparées.

• Quelques candidats affirment que : $1 - \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x < 1$.

• Certains autres pensent que $\dfrac{\ln x}{x - \ln x} = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln x}{\ln x} = \dfrac{\ln x}{x} - 1$.

Problème

• Une faute très répandue cette année : la série de terme général $\dfrac{1}{k}$ est convergente !

• La formule des probabilités totales ne s'écrit pas :

$P(X = i) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P_{(Z=k)}(X = i)$, mais $P(X = i) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P_{(Z=k)}(X = i)\,P(Z = k)$.

• On ne peut pas écrire « $E(X) \leq 2$ donc $E(X)$ existe ».

Conclusion :

Le niveau global des candidats semble se stabiliser.

La présentation est dans l'ensemble soignée et honnête et les candidats rédigent de plus en plus proprement,

Les candidats connaissent leur cours dans ses parties les moins techniques : un effort reste à fournir sur des notions telles que famille génératrice, fonction de répartition ainsi que sur la manipulation d'événements (inclusion, intersection, ...).

Comme l'année dernière, nous conseillons aux futurs candidats de travailler les mathématiques en ne perdant jamais de vue que la recherche d'une solution doit être argumentée, rigoureuse et honnête : faire semblant d'avoir trouvé ne trompe aucun correcteur.