

**Concours d'admission sur classes préparatoires  
Option ECE**

**RAPPORT DU JURY  
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
2021**

**Présentation de l'épreuve**

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
- Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Des questions d'informatique étaient proposées dans l'exercice 3 et le problème.
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, avec quelques questions particulièrement difficiles ou pour lesquelles la solution n'était pas donnée : ceci a permis de faire le tri entre les candidats autonomes et capables de proposer des pistes mais aussi capables de mener un calcul "en aveugle" à son terme. Sur ce dernier point, les correcteurs s'accordent à trouver que les calculs de sommes de séries ou de dérivées partielles posent de gros problèmes à un nombre non négligeable de candidats (cela dit, un bon nombre d'entre eux s'en sortent très bien).

**Description du sujet**

**L'exercice 1**, portant sur la partie analyse du programme, proposait l'étude de la fonction  $f$  définie par :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

Dans un deuxième temps, on cherchait un équivalent, lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ , du réel  $u_n$  défini comme l'unique solution de l'équation  $f(x, 1) = n$ , où  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

Cet exercice a, dans l'ensemble, été bien réussi, mis à part la recherche des points critiques, très souvent devinés et pas déterminés avec des arguments convaincants. Dans les dernières questions, la notion d'équivalent ne semble maîtrisée que par trop peu de candidats, la majorité d'entre eux se contentant de tenter quelque chose, au cas où !...

**L'exercice 2**, portant sur la partie probabilités du programme, établissait la convergence en loi d'une suite  $(Y_n)$  de variables aléatoires définies par  $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , où les variables  $X_i$

étaient indépendantes et suivaient la même loi de densité  $g$  définie par :  $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ .

Cet exercice a permis à la majorité des candidats de répondre correctement aux deux premières questions, mais ensuite, la technicité et le niveau élevé d'abstraction de l'exercice a fait son œuvre de discrimination. Il faut tout de même remarquer que trop peu de candidats pensent à vérifier que les fonctions données sont bien définies avant d'étudier leur signe et leur continuité ! Chez un certain nombre de candidats, la recherche de primitives (pourtant pas très compliquées ici) a posé de sérieux problèmes.

**L'exercice 3**, portant sur la partie algèbre linéaire du programme, étudiait l'endomorphisme  $f_a$  de  $\mathbb{R}^3$

de matrice  $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Une partie de l'exercice consistait

en le calcul de  $M_a^n$  puis la fin proposait la détermination de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_a^n$  (cette limite étant définie par l'énoncé). Les dernières questions s'attachaient à déterminer les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice limite trouvée précédemment.

Les premières questions de cet exercice ont été souvent bien réussies puisqu'il s'agissait de simples questions de calcul matriciel mais il faut tout de même signaler que ces calculs simples ont été ratés par un nombre non négligeable de candidats... Les dernières questions, quant à elles, ont donné lieu à de très grosses confusions. Les notions de famille libre et de base semblent floues : chez de nombreux candidats, une famille génératrice devient une base de façon "naturelle" et sans aucune argumentation... Globalement, c'est l'exercice le moins bien réussi.

**Le problème**, portant sur la partie probabilités du programme, proposait l'étude de deux jeux de Pile ou Face pratiqués par deux joueurs  $A$  et  $B$ .

- Le premier jeu se déroulait en manches dont la règle était la suivante : Pour la première manche,  $A$  et  $B$  lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux. Le but était de déterminer la probabilité que  $A$  gagne le jeu et celle que  $B$  le gagne.
- Le deuxième jeu était un pari entre  $A$  et  $B$  :  $A$  pariant sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et  $B$  pariant le contraire. Ici aussi, le but était de déterminer la probabilité que  $A$  gagne ce deuxième jeu et celle que  $B$  le gagne.
- Une troisième partie proposait une modélisation informatique de ces deux jeux.

Ce problème a permis de départager de façon tranchée les candidats. Il est le moins bien réussi de cette épreuve (avec l'exercice 3) mais c'est aussi le moins abordé, et de plus, peu de résultats étaient donnés dans l'énoncé : il fallait donc faire preuve d'une certaine autonomie alliée à une analyse sérieuse de la situation probabiliste. Beaucoup de candidats écrivent des égalités entre événements et probabilités, ou entre variables aléatoires et événements, ce qui montre la superficialité de leurs connaissances dans le domaine des probabilités.

### Statistiques

- Pour l'ensemble des 3241 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,17 sur 20 (très légèrement inférieure de 0,14 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,67 (inférieur de 0,4 point à celui de l'année dernière, et toujours très important et signe d'un classement efficace des candidats).
- 40,4% des candidats, contre 40,9% l'année dernière, ont une note inférieure à 8 (dont 16,9% ont une note inférieure à 4 contre 18,6% l'année dernière).
- 21,7% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage un peu supérieur à celui de l'année dernière qui était égal à 19,2%).
- 19,1% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage un peu inférieur à celui de l'année dernière qui était égal à 23,1%).

## Conclusion

Comme l'année dernière, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ont-ils compris en profondeur ce qu'ils font ?

Les copies sont, à de pénibles exceptions près, agréablement présentées et bien rédigées mais les correcteurs remarquent qu'il y a plus de candidats que l'année dernière qui rendent une copie désagréable, souvent très difficile à lire car lettres et chiffres sont mal calligraphiés, les questions étant parfois traitées dans un désordre indescriptible. De plus en plus de copies ont été qualifiées de « très sales » voire « illisibles » !

Sur le fond, un nombre non négligeable de candidats restent adeptes du bluff (notamment en probabilité) : il faut savoir que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable.

Pour terminer ce paragraphe, il faut parler d'un nombre imposant d'escrocs qui, lorsque les résultats sont donnés ou peuvent être devinés, écrivent n'importe quoi pour arriver à leurs fins (les fonctions de répartition  $F$  et  $G$  dans l'exercice 2, la probabilité de  $G_1$  à la question 1d) du problème, fortement "éclairée" par la question 2c) !...).

Rappelons, une fois encore, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.