

MATHÉMATIQUES I

Option Économique

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

L'exercice 1 (analyse) fait étudier une fonction, puis une suite récurrente et une intégrale associées à cette fonction.

Partie I

1.a. • La plupart des candidat(e)s oublient de signaler que $e^x - 1$ s'annule si et seulement si $x = 0$.

• Trop de copies affirment que f est continue en tout point de \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions continues, en oubliant d'indiquer que le dénominateur ne s'y annule pas.

• Les correcteurs ont rencontré de grossières erreurs sur la continuité de f en 0, par exemple : $f(0) \in \mathbb{R}$ donc f est continue en 0.

1.b. La définition de la notion de classe C^1 n'est pas toujours connue, et il y a trop souvent confusion avec : f est continue et dérivable.

1.c. Question rarement résolue, trop peu de candidats pensant à utiliser des développements limités en 0.

1.d. • Certaines copies contiennent de grossières erreurs, du genre : $f(0) = 1$ donc $f'(0) = 0$!

• Dans la plupart des copies, le théorème limite de la dérivée n'est pas correctement cité, le plus souvent par oubli de la continuité de f .

2.a. Étonnamment, trop de candidat(e)s se trompent dans le calcul de $u'(x)$ ou dans l'étude du signe de $u'(x)$.

2.b. • Il y a souvent oubli du cas $x = 0$.

• Le caractère strict de l'inégalité demandée est souvent négligé.

2.c. En général correct, bien que quelques copies contiennent des réponses fausses et des tableaux aberrants ou incohérents.

2.d. • Des copies obtiennent une limite infinie fausse pour $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$, et concluent quand même à une asymptote.

• L'obtention de la limite correcte $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$ conduit quelquefois, de façon aberrante, à une asymptote d'équation $y = -1$, qui est ensuite tracée comme droite d'équation $x = -1$.

• Souvent, il y a erreur de signe dans la formation de $f(x) - (-x)$, que l'on confond avec $f(x) - x$.

2.e. Les correcteurs ont vu trop de schémas incohérents ou faux.

Partie II

1. • L'oubli de l'examen du cas $x = 0$ lors de la résolution de l'équation $f(x) = x$ est presque systématique.

• Dans certaines copies, des calculs faux mènent à $\alpha = 0$, ce qui est aberrant car $f(0) = 1 \neq 0$.

• Dans de nombreuses copies, on affirme à tort que l'équation proposée $f(x) = x$ admet une solution et une seule parce que f est une bijection de $] -\infty ; +\infty[$ sur $]0 ; +\infty[$. C'est confondre l'équation $f(x) = x$ avec une éventuelle équation $f(x) = \alpha$, où α serait préalablement fixé.

2.a. Question classique, mais qui demande un peu d'initiative, et que l'on peut résoudre, par exemple, par l'étude des variations d'une fonction. Cette question est trop peu souvent correctement traitée.

2.b. Question facile, résolue dans la quasi-totalité des copies.

2.c. Il y a souvent un manque de rigueur : oubli de l'examen du cas $x = 0$, ou négligence du caractère strict de l'inégalité.

2.d. • La plupart des candidat(e)s oublient de montrer, ou au moins de signaler, que les u_n sont tous positifs ou nuls.

• Les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis sont souvent mal citées.

• Les valeurs absolues sont trop souvent négligées.

3. Encore un manque de rigueur dans la manipulation des valeurs absolues.

4. Question facile et souvent résolue.

5. Question trop peu souvent abordée, dans environ un tiers des copies. Quand elle est abordée, l'algorithme proposé et sa réalisation sont en général corrects, et ces copies ont alors été récompensées. Il y a cependant d'autres copies dans lesquelles l'algorithme proposé est aberrant, ce qui indique un manque de préparation de certain(e)s candidat(e)s.

Partie III

1. • Il y a trop souvent confusion entre G et une primitive de f .

• L'erreur $G'(x) = \int_x^{2x} f'(t) dt$ a été trop souvent rencontrée, suivie de contorsions pour aboutir, quelquefois après escamotage, au résultat de l'énoncé.

• Il y a souvent erreur dans la dérivation de la fonction composée $x \mapsto F(2x)$.

• L'explication du caractère C^1 de G est souvent fautive, avec un lien avec le caractère C^1 de f , au lieu de C^0 .

• Peu de candidat(e)s mènent à bien le calcul élémentaire de $2f(2x) - f(x)$, afin d'obtenir l'expression demandée pour $G'(x)$.

2.a. et b. Questions peu abordées, mais alors généralement bien faites.

3. Trop de tableaux de variations de G sont aberrants : G ne peut pas décroître en partant d'une limite $-\infty$.

L'exercice 2 (algèbre) propose l'étude d'une racine carrée d'une matrice carrée numérique d'ordre trois très simple.

Partie I

1. Quelques copies contiennent de grossières erreurs sur la notion d'inversibilité d'une matrice carrée.
2. et 3. Questions souvent abordées, et, en général, bien traitées, avec cependant quelquefois des erreurs dans la détermination des sous-espaces propres.

Partie II

1. L'équivalence logique est souvent remplacée, à tort, par une seule implication.
2. Question assez facile, souvent résolue.
3. Beaucoup de copies affirment, sans preuve, que, si N^2 est diagonale, alors N est diagonale, confondant probablement implication et réciproque.
4. • Dans quelques copies, c'est ici qu'est traitée la question 3.
 - Quelques candidat(e)s utilisent, à tort, une notation $D^{1/2}$. Cette notation n'étant pas présente dans l'énoncé, son sens dans le contexte doit être défini par le rédacteur, pour être prise en compte. De plus, cette notation suppose une unicité.
 - La résolution des simples équations $x^2 = 1$, $x^2 = 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est trop souvent fautive, et trop de copies ne donnent qu'une ou deux solutions à la question, au lieu de quatre.
5. Question rarement abordée. Il y a souvent confusion entre N et B .

Partie III

1. Des copies proposent $Q(x) = \sqrt{x}$, ce qui est bien sûr aberrant puisqu'il ne s'agit pas alors d'un polynôme.
2. La question peut être résolue en utilisant le résultat de la question précédente, ou bien, si le calcul de B a été mené à bien en II-5, la vérification peut se faire par un simple calcul.
3. Question presque jamais abordée ni résolue.

L'exercice 3 (probabilités) fait intervenir la loi géométrique.

C'est l'exercice le moins abordé, quelques copies faisant ici l'impasse.

Partie I

1. • Les justifications sont souvent incomplètes.
 - Quelques candidat(e)s confondent p et q .
2. La relation $U = T - 1$ est bien perçue dans moins de la moitié des copies. Quand le lien entre T et U n'est pas vu, les réponses sont farfelues, loi binomiale par exemple.

Partie II

De manière générale, il y a trop d'erreurs dans la manipulation des sommes de séries convergentes, en particulier en ce qui concerne les premiers termes.

1.a. Ici aussi, les justifications sont souvent incomplètes, les arguments d'incompatibilité et d'indépendance sont souvent omis.

1.b. et **c.** Des candidat(e)s confondent, pour une série convergente, somme partielle et somme totale.

2. Dans beaucoup de copies, on obtient $P([X = 2] \cap [Y = 1]) = pq$, au lieu de $2pq$.

3. Peu de candidat(e)s ont vu qu'il suffit d'échanger les rôles de p et q . Il y a des calculs inutiles, et aussi des réponses aberrantes faisant intervenir la loi binomiale, hors de propos ici. Enfin, les correcteurs ont rencontré de grossières confusions entre événements et probabilités.

4. Question rarement traitée.

5. Au contraire, cette dernière question, qui utilise peu les résultats précédents, a été souvent abordée, et correctement résolue.

Les exercices 1 et 2 sont abordés dans la quasi-totalité des copies, l'exercice 3 est quelquefois délaissé.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, progressif, couvrant une large partie des connaissances exigibles, en particulier celles de première année, bien gradué en difficulté dans chaque exercice, de longueur satisfaisante, et bien adapté à la voie économique.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation dans les questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager.

Une moitié environ des copies est de niveau très insuffisant. Pour l'autre moitié des copies, le niveau va du convenable à l'excellent.

Dans l'ensemble, la présentation a paru convenable. Mais la rédaction est souvent trop approximative. Il est impératif que les questions soient numérotées selon l'énoncé et clairement séparées. Les résultats et les réponses doivent être mis en évidence, par exemple en les encadrant. Le jury conseille aux candidat(e)s une meilleure organisation de leur brouillon.

L'éventail complet des notes a été utilisé et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Moyenne de l'épreuve : 10,41 / 20 .