Épreuve emlyon 2020 Voie E

Rapport de correction

1 Remarques générales

Le sujet 2020 de la voie économique était composé, sur le même modèle que les années précédentes, de trois exercices indépendants, balayant une large partie du programme officiel ECE. Le but de l'épreuve est de vérifier chez les candidats la bonne assimilation de différentes parties du programme des deux années de classe préparatoire, ainsi que de tester leurs facultés de raisonnement.

Les questions se veulent de difficulté progressive dans chacun des trois exercices, visant à évaluer les compétences des candidats dans les points suivants : en priorité elles vérifient la bonne connaissance du cours, ce qui permet à des candidats sérieux mais de niveau modeste une note loin d'être déshonorante ; elles évaluent ensuite les capacités des candidats à former des raisonnements rigoureux et argumentés, reposant sur des connaissances solides, sur des questions soit de type « classiques », soit plus délicates demandant alors un certain recul vis à vis des notions du programme.

Il n'était pas indispensable d'avoir traité la totalité du sujet pour obtenir une excellente note. Il est toujours préférable de mener un raisonnement rigoureux et complet sur seulement une moitié du sujet, plutôt que de donner tous les résultats (même justes) sur de nombreuses questions de manière trop rapide et sans explication réelle ; un tel raisonnement ne fournissant alors en général que peu de points au barème.

Sur la majorité des questions, le barème permet d'évaluer les compétences des candidats sur trois points :

- ⋆ en premier lieu, comprendre la problématique mise en jeu dans la question, à savoir bien lire la question demandée pour percevoir ce que l'on peut attendre d'eux à ce moment précis du sujet, problématiser correctement l'intitulé de la question et utiliser alors à bon escient celles qui précèdent ;
- ⋆ en second lieu, connaître et maîtriser les définitions et théorèmes du programme des deux années EES, en donnant le cas échéant les hypothèses nécessaires ou suffisantes à leur application, dans le respect strict du cadre fixé par le programme officiel ;
- ⋆ une dernière part des questions se veut calculatoire, permettant aux candidats ayant du mal à mener des raisonnements abstraits, de pouvoir a minima mettre en application les techniques et formules vues en classe, par exemple dans les questions d'analyse.

L'épreuve contient enfin chaque année au moins une question d'informatique en langage Scilab correspondant au programme officiel ECE, avec un souci d'évaluer les compétences des candidats dans ce domaine sur des questions de type varié, d'un exercice à l'autre, d'une année à la suivante. Les questions d'informatique peuvent essentiellement être de trois formats : soit un programme complet ou non à achever et/ou interpréter (questions **I.9.a.** ou **III.3.c**), soit un script à écrire entièrement (question **III.3.b**), soit une utilisation de sorties graphiques pour permettre de conjecturer un résultat vérifié ensuite dans le sujet (questions **I.9.b.** ou **III.3.d.**).

Les questions d'informatique sont en général évaluées avec une large bienveillance et représentent une part non négligeable du barème total, nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à aborder davantage ces questions qui sont dès lors bien mieux rémunérées que d'autres questions plus difficiles du sujet.

Il est attendu des candidats une certaine honnêteté intellectuelle dans leur copie : c'est une qualité essentielle recherchée par tous les correcteurs. Il est inutile de faire semblant que l'on arrive à un résultat de l'énoncé quand on a manifestement fait des erreurs de calcul. Il peut donc être utile de rappeler que de tels comportements dans les copies sont toujours repérés et très mal perçus par les correcteurs, d'autant plus sur les premières pages de la copie. En effet, ceci provoque dès lors un manque de confiance du correcteur vis à vis du candidat, ce qui mettra en doute ensuite la plupart des questions suivantes. Il est donc toujours préférable pour un candidat de mener ses calculs, et s'il voit une incohérence avec le sujet et qu'il ne trouve pas son erreur, a minima de signaler sur sa copie qu'il repère une disparité entre sa réponse et celle attendue, et qu'il admet le résultat pour continuer la suite ou qu'il pense repérer une erreur dans l'énoncé et continue alors dans ce sens. De même, les candidats qui se contentent d'énoncer les résultats sans les justifier n'obtiennent que très peu de points.

Enfin, les correcteurs s'attachent à toujours valoriser les copies qui sont bien présentées plutôt que celles qui relèvent d'un effort trop minimaliste pour mettre en valeur leurs réponses. La numérotation des questions abordées doit être clairement indiquée, et ne peut par exemple être résumée à une numérotation globale (4 au lieu de $4.a$, $4.b$, $4.c$,...). Il est toujours appréciable que les candidats groupent dans leur copie leur résolution d'un des trois exercices (par exemple en démarrant une copie nouvelle pour chaque exercice). Lorsque les questions sont traitées dans le désordre, ou quand un candidat revient à un exercice après en avoir traité un autre, c'est toujours plus difficile pour le correcteur aussi de suivre le raisonnement du candidat. De même, la numérotation des pages est parfois hasardeuse, ce qui rend difficile la lecture. Si n est le nombre maximal de pages rédigées par le candidat durant l'épreuve, il vaut mieux numéroter les pages $1/n$, $2/n$, $\dots$, n/n.

Dans la mesure du possible les correcteurs apprécient que les résultats soient clairement visibles dans la copies, par exemple en les soulignant ou les encadrant (à la règle !), ou grâce à des couleurs. Les candidats ne faisant pas d'effort de bonne présentation ou de bonne écriture ont de grandes chances de ne pas se voir attribuer de points sur certaines questions par le correcteur, tout simplement car la copie est illisible donc les arguments ne sont pas jugés présents sur la copie, ou bien car en cas de doute sur une réponse (argument partiel ou manquant) le correcteur choisira alors toujours la version pénalisante pour dévaloriser la copie face aux autres qui font l'effort d'une bonne rédaction et d'une belle présentation. Nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à soigner cet aspect de leur copie.

2 Éléments statistiques

Sur l'épreuve de la voie économique 2020 (toutes écoles inscrites confondues), 3680 candidats ont composé, et ont obtenu une moyenne générale de 10,82 sur 20, avec un écart-type de 5,69.

L'écart-type très haut témoigne d'une grande hétérogénéité dans les copies corrigées. Alors que certains candidats traitent pratiquement l'intégralité du sujet avec une maîtrise avancée des notions du programme, d'autres montrent des difficultés dès les toutes premières questions obtenant alors des notes très faibles, en grande partie à cause d'un travail insuffisant lors des deux années de classe préparatoire sur l'apprentissage du cours. Cette année par exemple, 20 candidats ont obtenu la note minimale de 0.01 avec aucune question répondue correctement.

Les copies étaient corrigées cette année avec un barème portant sur 114 points, chaque question ayant un nombre de points entier compris entre 1 et 4, les trois exercices étant de poids relativement égal (à part l'exercice 2 de longueur légèrement plus courte). Les notes des candidats sont alors obtenues en multipliant cette note brute sur 120 par un coefficient, et en lissant toutes les notes supérieures à 17, les notes étant par ailleurs harmonisées au niveau national entre les correcteurs. Toutes les hautes notes étant lissées, le nombre de candidats obtenant 20 a été donc inférieur aux années précédentes, ne conservant cette note maximale qu'aux tous meilleurs candidats (141 candidats).

Outre les questions difficiles présentes à la fin du problème 1, un candidat sérieux et rigoureux traitant correctement et entièrement seulement une partie du sujet pouvait donc espérer avoir une note tout à fait honorable. Il ne faut donc pas hésiter pour les candidats les plus faibles à essayer de repérer les questions plus faciles du sujet (qui ne sont pas uniquement les premières de chaque problème) afin de gagner des points aisément.

À l'inverse, même si un survol rapide du sujet et un « grapillage de points » peuvent être partiellement payants, les candidats auront toujours plus de points en se focalisant sur une partie entière d'un problème. Nous rappelons une nouvelle fois que l'épreuve teste les facultés de raisonnement, et par conséquent, les questions qui relèvent de la bonne compréhension de l'enchaînement des questions sont en général valorisées, et permettent à des candidats de niveau modeste de pouvoir montrer qu'ils savent manier des raisonnements déductifs, et peuvent alors plus facilement se démarquer des candidats dont le niveau est plus faible.

Cette année encore, certains candidats n'abordent parfois que deux exercices seulement, laissant croire qu'ils ont effectué des impasses lors de leurs révisions, mais c'est peut-être la longueur du sujet qui a également joué sur ces copies tronquées. Si la longueur du sujet ne permet pas de favoriser la valorisation d'explications précises et que les candidats rigoureux perdent trop de temps, les concepteurs ne s'interdisent nullement de réfléchir pour les années prochaines à des sujets plus compacts qui favoriseraient plus les bonnes explications plutôt que les affirmations toutes faites, quitte à ne pas aborder l'ensemble du programme.

3 Épreuve 2020

Le sujet était composé de trois exercices indépendants et plutôt « classiques », dans le sens où les candidats sont supposés avoir pour la plupart déjà travaillé durant leurs deux années de classe préparatoire le même type de raisonnements présents dans le sujet, en traitant des problèmes proches parmi les annales ou en s'entraînant sur des exercices d'applications du cours mettant en jeu des techniques et méthodes similaires. L'équipe de conception s'attache chaque année à ce que le sujet réponde à ce cahier des charges, de manière à ce que le sujet soit conforme au programme, progressif, de manière à valoriser les candidats ayant effectué un travail régulier et sérieux en CPGE.

L'exercice 1 abordait des notions variées d'analyse de première et deuxième années : étude de fonctions d'une ou deux variables, étude d'une suite implicite.La partie A a montré que les chapitres d'analyse de première année, peut-être plus lointains pour les candidats que ceux de seconde année, sont parfois mal maîtrisés. C'est sans doute pourquoi c'est sur cet exercice particulièrement que les candidats ont souvent perdu des points. Les parties B et C, sans grande difficulté, ont été mieux traitées. En particulier, les questions d'informatique ont été abordées par un grand nombre de candidats, preuve que les enseignants encouragent vivement leurs étudiants à travailler l'algorithmique pendant les révisions.

L'exercice 2 étudiait une famille de matrices à paramètres, en spécifiant plusieurs cas, recherchant en particulier les valeurs propres non-nulles grâce à l'étude de la restriction de l'endomorphisme induit sur l'image. Les premières questions permettaient de vérifier les techniques usuelles en algèbre linéaire au programme : calcul matriciel, représentation matricielle d'un endomorphisme, diagonalisation. Comme à son habitude, les concepteurs cherchent à ce qu'un minimum de calcul soit nécessaire, préférant vérifier les aptitudes des candidats sur les raisonnements algébristes. Peu bloquant, il a contribué à ce que certaines copies obtiennent de nombreux points.

Enfin, l'exercice 3 abordait les variables aléatoires suivant la loi de Pareto à deux paramètres, et aboutissait à l'étude d'estimateurs de chacun de ces paramètres dans des cas spécifiques. À l'inverse, il était nécessaire ici d'être un peu habile en calcul intégral pour mener à bien les questions. Cependant, le sujet étant classique, de nombreux candidats ont su mettre en œuvre les méthodes au programme et ont obtenu de nombreux points également sur cet exercice.

Les candidats ont abordé généralement les trois exercices dans un ordre de leur choix. Les correcteurs ont estimé qu'il s'agissait d'un excellent sujet, de difficulté modérée et parcourant une large partie du programme. Le sujet était bien adapté au niveau des candidats et conforme au cadre strict défini par le programme et son esprit. Ce sujet a donc atteint ses objectifs en terme de progressivité, ce qui a permis de classer les candidats de manière tout à fait satisfaisante, y compris pour les faibles notes, permettant de récompenser les candidats ayant fourni un investissement minimal en mathématiques, et via des questions plus fines ou de synthèse de démarquer les meilleurs candidats.

Malgré la longueur du sujet, les trois exercices ont été intégralement abordés par de nombreux candidats brillants, traitant toutes les questions du sujet. Cette année était particulière, ayant été marquée par le contexte sanitaire et le confinement des candidats au printemps. L'épreuve ayant été retardée de deux mois, certains candidats ont clairement su mettre à profit ce temps pour travailler en profondeur le programme et atteindre un niveau excellent grâce à leur entraînement ; d'autres à l'inverse ont perdu leurs repères jusqu'à oublier les chapitres les plus élémentaires, ce qui explique la présence de copies presque vides, en nombre supérieur aux années précédentes. Plus que les années précédentes, le nombre de candidats ne maîtrisant pas du tout les objets manipulés a été relativement inquiétant. L'écart-type particulièrement haut témoigne de ces grandes disparités qui ont été relevées par l'ensemble des correcteurs. L'équipe de conception veillera donc pour les sessions prochaines à ce qu'une grande majorité du barème soit attribuée à la bonne compréhension des concepts au programme et non à une assimilation trop superficielle, et rédigera les énoncés du sujet dans ce sens.

4 Analyse en détail du Sujet

Analyse de l'Exercice 1 - Partie A : Étude de la fonction f

1. La justification de la dérivabilité est souvent sommaire, le plus souvent incorrect, le mot « composée » étant employé à tort et à travers, sans réelle compréhension. Très peu de candidats justifient rigoureusement l'existence de $\ln(x)$ ou de $\ln(1-x)$. On lit également parfois que la fonction f est continue donc dérivable, même dans de bonnes copies. Certains candidats confondent la fonction f et le réel $f(x)$.
   Le calcul de la dérivée est quant à lui assez bien fait ; seuls certains rares candidats tentent (sans réelle dissimulation) des coups de bluff pour masquer leur erreur dans la dérivée de $x \mapsto \ln(1-x)$, ce qui est rapidement repéré par les correcteurs.

2. **a.** Certains étudient, sans y parvenir, une fonction pour répondre à la question. Il y a, heureusement, beaucoup de bonnes démonstrations. Il est étonnant de voir le peu de candidats qui utilisent les propriétés pourtant basiques de la fonction ln pour démontrer ce résultat sans étude de fonction, preuve que ces propriétés ne sont pas suffisamment connues.

b. On attendait ici une démonstration correcte que $(1-x) \in]0,1[$ lorsque $x \in]0,1[$ pour pouvoir appliquer la question 2.(a) à $t = 1-x$. Très peu l'ont fait.

3. **a.** Cette question a particulièrement été mal traitée par les candidats. Il est d'ailleurs très décevant de constater que des calculs de limites basiques sans forme indéterminée soient aussi mal maîtrisés, même parmi les bonnes copies ; très peu prennent la peine de justifier leur raisonnement. Voici ci-dessous les principales erreurs rencontrées :

- Parmi ceux qui ont utilisé un équivalent de $\ln(1-x)$ en 0, on note une majorité qui écrivent que $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- On voit souvent l'expression magique « croissance comparée » employée sans raison apparente pour la limite en 0 de $\frac{x}{\ln(x)}$.
- La plupart des candidats ne voit pas la différence entre « f est prolongeable par continuité en 0 » et « f est continue et 0 », confondant en général les deux, écrivant sans gêne des $f(0) = \frac{\ln(1)}{\ln(0)}$.
- Un certain nombre d'étudiants recherchent la limite de la fonction en 0 par valeurs inférieures.
- On relève des confusions entre prolongement par continuité et dérivabilité ; en effet certains utilisent le taux d'accroissement.

b. Dans l'ensemble, les candidats pensent bien au taux d'accroissement, mais les résultats sur les limites de référence semblent totalement ignorés pour beaucoup.

4. On rencontre le même problème qu'aux questions **3.a.** et **3.b.** : les limites de référence ne sont pas connues et très peu savent justifier et/ou interpréter les résultats obtenus.

Les candidats obtiennent par exemple souvent $-\infty$ pour limite au lieu de $+\infty$ car leur limite du dénominateur est souvent un 0 non signé. C'est d'autant plus dommage que l'énoncé donnait la stricte croissance de f sur $]0,1[$, signe que ces candidats manquent cruellement d'un minimum de recul face à leurs résultats.

Pour l'interprétation graphique, beaucoup de candidats confondent les notions d'asymptote et de tangente.

5. Cette question est rarement traitée, et lorsqu'elle l'est, c'est avec très peu de soin. Très peu font le lien entre l'étude de la fonction, son ensemble d'étude, ses variations, et la courbe représentative. En particulier :

- On remarque une confusion entre l'horizontale et la verticale chez plusieurs candidats.
- La confusion entre tangente et asymptote est assez fréquente, comme signalé à la question précédente
- Il est étonnant de voir régulièrement dans les copies la tangente en 0 qui est bien tracée, mais de constater que cette droite n'est pas du tout tangente à la courbe proposée.
- On peut déplorer que dans de nombreuses copies, malgré une étude satisfaisante dans les questions précédentes, le candidat se trouve dans l'incapacité de former une représentation graphique cohérente.

En bref, nous ne pouvons qu'encourager les candidats à se préparer pendant l'année à ce genre de question en s'entraînant régulièrement à tracer des courbes représentatives de fonctions. C'est une question facile qui rapporte des points aisément sans peu d'effort.

Analyse de l'Exercice 1 - Partie B : Étude d'une suite

6. Cette question est bien traitée dans l'ensemble ; le théorème de la bijection est en général connu, même si certains candidats oublient de vérifier que 0 est bien dans l'intervalle image.

On doit toutefois noter que certains candidats ne savent pas dériver une fonction polynôme et que beaucoup ne maîtrisent pas le langage mathématique. Est-il utile de rappeler ou de préciser qu'une *équation* n'est ni croissante, ni décroissante, ni continue et qu'elle n'appartient pas à un intervalle. Beaucoup de candidats notent effectivement (E_n) la fonction proposée et étudient donc le sens de variations d'une équation. Cela montre à quel point ces candidats ne comprennent pas bien les objets qu'ils manipulent.

7. Bien que la réponse à cette question soit immédiate, beaucoup de candidats vont tenter de la démontrer par récurrence sans aucun succès. La stricte croissance ou la croissance de la fonction est rarement mentionnée. On voit chez certains une confusion entre $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_n) = 0$.

8. Quand cette question est faite, en général elle est assez bien traitée.Cependant, une part non négligeable des candidats considère que u_n est l'équation elle-même, ou bien que u_n est la fonction étudiée précédemment et u_1 et u_2 sont donc les expressions de la fonction pour $n = 1$ et $n = 2$.

9. **a.** Cette première question d'informatique, proposant de réécrire l'algorithme de dichotomie, a été assez peu traitée et souvent de manière incorrecte. Parmi ceux qui la traitent, les affectations `a=c` et `b=c` semblent mises au hasard. On lit parfois les affectations écrites à l'envers `c=a`, `c=b`, sans qu'on sache si elles sont pensées justes. La condition sur le `while` est souvent fantaisiste, ou bien dépend souvent de `u` qui n'a pas encore reçu d'affectation ! Enfin, signalons que modifier `n` dans ce genre de programme est absurde.

L'algorithme de dichotomie est un grand classique de l'informatique aux concours, nous ne pouvons donc qu'encourager les candidats à l'étudier en détail afin d'en assimiler le fonctionnement.

b. Cette question est presque tout le temps bien traitée. À l'inverse, les incohérences sont sévèrement pénalisées. C'est le cas par exemple pour ceux qui écrivent un raisonnement du type: « la suite est (ou semble) croissante et majorée par 1, donc elle est convergente de limite $+\infty$ ».

10. **a.** Cette question a été peu traitée, mais correctement par ceux qui l'avaient abordée. Certains font une tentative de récurrence ; parmi eux, beaucoup n'aboutissent pas, et certains aboutissent sans même se rendre compte qu'ils n'ont pas utilisé leur hypothèse de récurrence pour l'hérédité.

b. Comme à la question précédente, peu de tentatives, mais celles proposées sont souvent correctes

c. La plupart des candidats a vu qu'il s'agissait d'appliquer le théorème de la limite monotone. Cependant, peu ont démontré que la limite est égale à 1. Parmi ceux qui s'y sont risqués, beaucoup ont pensé qu'on était en présence d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, et ont tenté de chercher un point fixe en résolvant $f(\ell) = \ell$; c'est faire preuve d'un manque de discernement face à l'exercice.

Pour les autres, il y a beaucoup de passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'équation (E_n) vérifiée par u_n. Ils obtiennent alors maladroitement la relation $\ell^n + \ell - 1 = 0$ satisfaite par ℓ et qui dépend encore de n.

Seuls certains rares candidats de bon niveau ont utilisé f^{-1} pour trouver correctement la limite de (u_n)

Analyse de l'Exercice 1 - Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

11. **a.** Cette question a été bien traitée dans l'ensemble. Seuls certains rares candidats ne savent pas calculer des dérivées partielles

b. La très grande majorité des candidats sait ce qu'est un point critique ;la résolution rigoureuse des systèmes d'équations non linéaires n'est cependant pas maîtrisée. Si les calculs sont globalement menés, la justification de l'unicité du point cherché est par exemple rarement traitée.

12. **a.** Bien pour la plupart des candidats.

b. Peu de candidats donnent l'équation vérifiée par les valeurs propres sous forme d'un polynôme du second degré ; il s'ensuit qu'on trouve assez peu de bonnes justifications pour l'existence de deux valeurs propres distinctes, pourtant demandé par l'énoncé.. Parmi ceux qui donnent l'expression du produit, la plupart ne la justifie pas.

Attention, mentionnons une nouvelle fois, comme chaque année, que certains candidats utilisent les notations de Monge r, s et t qui sont hors programme en ECE. Ces candidats sont alors pénalisés et n'obtiennent pas les points à la question.

13. Si les candidats pensent bien à justifier que la fonction n'admet pas d'extremum local en son unique point critique, il fallait bien penser pour obtenir l'intégralité des points de dire qu'être au point critique était une condition nécessaire pour justifier qu'il ne pouvait pas y en avoir en un autre point de $]0;+\infty[^2$. avant de dire qu'elle n'a pas d'extremum local sur $]0,+\infty[^2$, ce qui est rarement fait correctement.

Analyse de l'Exercice 2

1. **a.** Cette question élémentaire a mis en lumière de grosses incohérences dans les objets et ensembles manipulés par les candidats : les ensembles E et $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sont confondus, E et $M(a,b)$ représentent le même objet, les matrices et les vecteurs colonnes semblent être de même nature, les espaces vectoriels et les applications linéaires auraient les mêmes propriétés ...

Certains tentent sans succès de montrer que E est un sous-espace vectoriel en revenant à la définition points, puis écrivent ensuite E sous forme de Vect, mais n'en déduisent pas pour autant que E est bien un sous-espace vectoriel

Parmi ceux qui tentent de montrer la stabilité par combinaison linéaire, on repère très fréquemment beaucoup d'entourloupes.

b. Les méthodes de démonstration ne sont pas connues. En particulier, ici, il s'agissait de donner un contrexemple, et rien d'autre.

2. Dire que la matrice est triangulaire supérieure ne prouve pas qu'elle soit diagonalisable. On relève beaucoup de tentatives de démonstrations par l'absurde qui n'en sont pas ; par exemple : « si $M(0,0)$ était diagonalisable, comme elle n'a qu'une valeur propre elle serait semblable à la matrice nulle ce qui est vrai donc $M(0,0)$ est diagonalisable' ».
Comme l'énoncé l'exigeait (*Justifier*), on attendait une démonstration du résultat, qui pouvait (ou aurait dû) se limiter à « $M(0,0)$ est déjà diagonale », ce qui n'a été que rarement (voire très rarement) évoqué.

3. **a.** Signalon un nombre impressionnant de calculs erronés, qui conduisent à un polynôme faux. (Ou des calculs justes avec un polynôme faux malgré tout).

b. Même si nous le signalons chaque année, il y a beaucoup des erreurs confondant le spectre de A avec l'ensemble des racines du polynôme annulateur. La recherche d'une base n'est pas toujours bien menée, ou pas justifiée. Entre autres, dans la recherche de $E_0(A)$, les candidats obtiennent bien en général comme critère d'appartenance $x = -t$ mais beaucoup d'entre eux interprètent à tort l'absence de condition sur y et z par $y = z = 0$.

c. Cette question de synthèse est en général bien traitée par les candidats qui sont arrivés jusque-là. Cependant, si la matrice P obtenue n'est clairement pas inversible (une colonne nulle, ou des colonnes proportionnelle), ou si le critère de diagonalisation sur les dimensions n'est pas rempli (si la somme des dimensions des espaces propres devient strictement supérieure à 4 par exemple), il serait préférable que les candidats cherchent leur erreur, ou a minima mentionner qu'ils se rendent compte qu'ils se sont trompés, plutôt que de bluffer.

Rappelons que c'est la taille de la matrice qui compte dans la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité, et pas la dimension de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; on voit très fréquemment cette confusion dans les copies. De même, lorsqu'on lit « la somme des sous-espaces propres vaut 4 », le correcteur se rend compte de l'incompréhension des candidats face aux objets mathématiques qu'ils manipulent.

4. a. Cette question est en général bien traitée en général , mais souvent sans justification. Il est dommage que l'écriture $B - bI_4$ devienne dans certaines copies $B - I4$, voire même I_4.

b. On attendait ici un argument précis sur le fait que 0 et b étaient valeurs propres de B en lien avec la question précédente, mais également sur le fait qu'il ne pouvait pas y avoir d'autre valeur propre, ce qui a été rarement fait. Plusieurs candidats maladroits ont confondu le rang de B et la dimension de $\text{Ker}(B)$ ou bien confondu les valeurs propres de B avec celles de $B - bId$.

c. Cette question a été bien traitée par les candidats qui avaient abordé les questions **4.a.** et **4.b.**.

5. a. Cette question est bien traitée en général.

b. Pour montrer que cette famille est une base, on retrouve les confusions entre la *dimension* de la famille et la *taille* de $\mathbb{R}^4$. Certains candidats pensent que toute famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Signalons que la seule mention de *famille libre maximale* n'est pas suffisante pour obtenir tous les points, on attend une référence claire à la *dimension* de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

c. Contrairement aux années précédentes, cette question a été plutôt bien traitée dans l'ensemble. Seuls quelques rares candidats se trompent sur le calcul de $f(v_1)$ et $f(v_2)$.

d. Trop rares sont les candidats qui vérifient que le potentiel vecteur propre de T est en effet non nul. Une remarque plus générale concerne l'usage des équivalents qui bien souvent est insuffisamment rigoureux.

Très peu de candidats lisent l'information « $\lambda \neq 0$ »dans cette question. Pourtant cette hypothèse est nécessaire pour conserver l'équivalence ...

e. Le lien entre T, N et $M(a, b)$ n'a généralement pas été vu. Les candidats ayant traité la question ont souvent conclu avec « T diagonalisable »au lieu de conclure sur $M(1, 1)$. Même s'ils trouvent le polynôme donnant les valeurs propres, les candidats obtiennent souvent des racines fausses pour ce polynôme de degré 2.

f. Comme à la question précédente, le lien entre les différentes matrices n'a généralement pas été vu.Les candidats traitent en général les valeurs propres de T mais très rarement répondent à la deuxième partie de la question

g. Cette question n'a été presque jamais traitée.

Analyse de l'Exercice 3 - Partie A : Loi de Pareto

1. Cette première question a été plutôt bien traitée en général, sauf par ceux qui ont eu des problèmes de calcul de primitives.
Cependant, on attendait une rédaction rigoureuse et un minimum précise pour obtenir l'intégralité des points. La justification de la positivité et de la continuité de f était souvent très succinte, parfois donnée par automatisme sans réelle vérification (lorsqu'on lit que f est continue sur $\mathbb{R}$ par exemple).
La principale erreur, qui est lourdement sanctionnée ici, est de confondre l'intégrale généralisée avec l'intégrale partielle. On attendait clairement une justification de la limite (en mentionnant $a > 0$).
Signalons une nouvelle fois que, comme à la question **3.a.** de l'exercice 1, la formule « croissance comparée »n'est pas la justification magique de n'importe quel calcul de limite.

2. Cette question a en général été bien traitée lorsque la question 1 l'était aussi, puisqu'elle utilisait le même calcul de primitive. Cependant, on relève un manque de rigueur dans les écritures ; parfois la variable d'intégration est absente, et il n'est pas rare de voir $F(x) = \displaystyle\int_b^x f(x)\mathrm{d}x$, signe d'une incompréhension des notations d'intégration.

3. a. De nombreuses confusions ont été notées dans les inégalités permettant de s'affranchir de $U^{-1/a}$. En particulier, les raisonnements sont souvent donnés sans justification, le réel x utilisé n'étant que rarement précisé. Le manque de rigueur a ici été fatal pour beaucoup de candidats : tous ceux qui n'ont pas pris soin de justifier leurs opérations ont en conséquent obtenu une inégalité dans le mauvais sens.

b. Cette question d'informatique, plutôt facile après la question précédente, a été très mal traitée, avec de nombreuses fonctions qui n'en sont pas. Signalons à tout hasard qu'une fonction qui simule une variable aléatoire doit a priori faire intervenir un générateur aléatoire !

c. Certains rares candidats ont fait référence à la notion d'espérance, mais peu ont compris ce que contenait réellement la liste `L`.

d. Le lien avec la question **4.** suivante n'a pas été vu. Les rares candidats qui ont regardé la question ont comparé a et b, et l'existence de l'espérance n'a été mentionnée que dans les toutes meilleures copies.

4. a. Le fait que l'espérance existe en reconnaissant une intégrale de Riemann avec $a > 1$ a souvent été fait, et le calcul de la valeur a souvent été correct. Il était cependant rare que la limite en $+\infty$ de l'intégrale partielle soit justifiée (avec $a > 1$)

b. Ceux qui ont traité la question **4.a.** ont en général bien traité la question **4.b.**. Mais le calcul explicite de la variance à partir de la formule de König-Huygens est souvent fait en deux lignes sans réelle justification, sans doute pour gagner du temps.

Analyse de l'Exercice 3 - Partie B : Estimation du paramètre b

5. a. Cette question a été souvent mal traitée, en *recopiant* un raisonnement vu en cours mais mal compris. On voit ici clairement des confusions entre un minimum et un maximum, entre la fonction de répartition ou la fonction de queue ; effectivement certains candidats veulent transformer $P([Y_n > x])$ en $1 - P([Y_n \leqslant x])$.
Peu de justifications sont présentes, l'écriture de l'évènement est négligée pour passer directement à une écriture avec des probabilités, l'indépendance des variables X_i n'étant pas toujours mentionnée.

b. Quand la question précédente est bien faite le résultat est toujours bien donné. Il est dommage cependant que pour tous les autres, il y ait tant de tentatives de bluff pour retomber à un résultat arrangeant malgré une question précédente visiblement incohérente. Le cas $x < b$ est souvent oublié.
Signalons que l'égalité des fonctions de répartition suffit pour conclure que les variables suivent la même loi. Il est donc inutile de revenir aux densités!

c. De façon générale, les questions d'estimation ont été bien traitées par les candidats qui les ont abordées. Les définitions sont connues et les propriétés utiles de l'espérance et de la variance de αY_n également. Cependant, la rédaction de ces questions a été souvent mauvaise, sans justification des propriétés habituelles (linéarité de l'espérance, utilisation de l'indépendance...)

6. a. La linéarité pour l'espérance et l'indépendance pour le calcul de variance sont peu citées. Pourtant ce sont ces justifications qui sont attendues et qui apportent les points de la question.
Le fait que $a = 3$ est souvent non utilisé, les candidats laissant la variable a dans tous leurs calculs.
Certains candidats maladroits confondent les variables aléatoires X_n et Y_n, prenant par exemple l'espérance de Y_n au lieu de celle de X_n.

b. Comme à la question précédente, le fait que $a = 3$ est souvent non utilisé, ce qui complique inutilement les calculs et les résultats.

7. On retrouve souvent que le meilleur estimateur est celui dont le « risque quadratique tend le plus vite vers 0 »: il y a donc une confusion entre la comparaison de deux estimateurs à distance finie ou en terme de comportement asymptotique.

Analyse de l'Exercice 3 - Partie C : Estimation du paramètre a

8. Malheureusement, cette question peu difficile a donné lieu à beaucoup de bluff pour arriver au résultat. Le cas $x < 0$ a souvent été oublié.
Cependant les candidats qui ne parvenaient pas à déterminer le paramètre de la loi exponentielle pouvaient très bien donner les formules générales de l'espérance et de la variance d'une loi exponentielle pour obtenir les points correspondants.

9. a. Cette question a été bien traitée par les rares candidats qui y sont arrivés.

b. De même, cette question a été bien traitée par les bons candidats qui y sont arrivés.