



**SUJET ZÉRO n°2**

**MATHÉMATIQUES APPROFONDIES  
VOIE ECG**

**CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023**

# Mathématiques approfondies - Sujet zéro 2

## EXERCICE 1

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt$  converge.

On note alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt.$$

2. (a) Calculer  $I_0$ .

(b) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

i. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que pour tout réel  $A$  strictement positif :

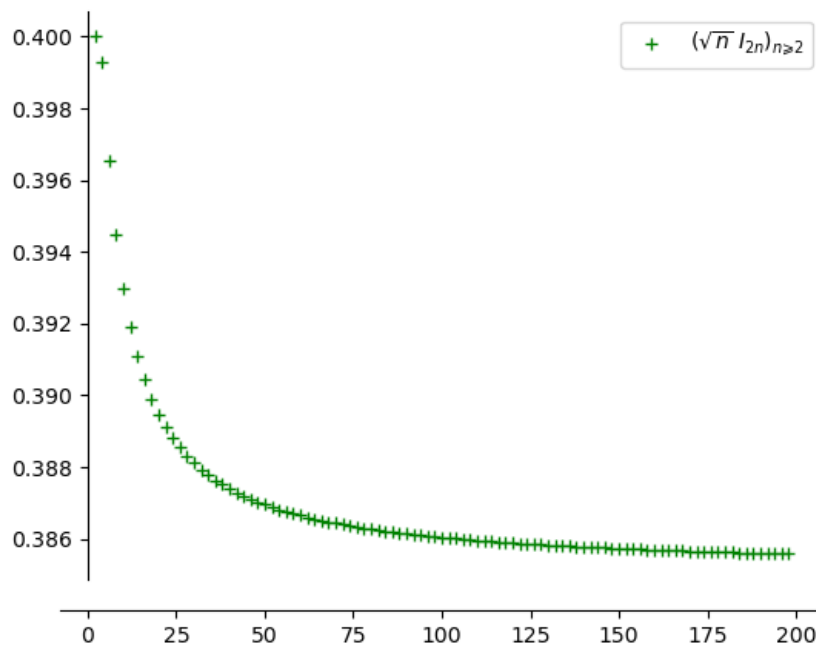
$$\int_0^A e^{-t} \sin^n(t) dt = -e^{-A} \sin^{n-1}(A)(\sin(A) + n \cos(A)) - n \int_0^A e^{-t} \sin^n(t) dt + n(n-1) \int_0^A e^{-t} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt.$$

ii. En déduire que  $I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$ .

3. (a) Compléter la fonction Python suivante pour que, prenant en argument un entier naturel  $n$ , elle calcule et renvoie la valeur de  $I_{2n}$ .

```
def calcul(n):
    I = .....
    for k in range(1, n+1):
        I = I * .....
    return .....
```

(b) On a représenté ci-dessous la suite  $(\sqrt{n} I_{2n})_{n \geq 1}$  à l'aide du programme Python précédent. Que peut-on conjecturer pour un équivalent de  $I_{2n}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?



4. Soit  $n$  un entier naturel.

(a) Justifier l'égalité :

$$\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t} \sin^n(t) dt = \left( \sum_{k=0}^N \left( (-1)^k e^{-\pi} \right)^k \right) \int_0^\pi e^{-t} \sin^n(t) dt$$

(b) En déduire que :

$$I_n = \frac{1}{1 - (-1)^n e^{-\pi}} \int_0^\pi e^{-t} \sin^n(t) dt.$$

(c) Montrer que :  $I_n > 0$ .

5. On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :  $u_n = -\ln(\sqrt{n}I_{2n})$ .

(a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\ln\left(\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)$ .

(b) Montrer, en utilisant la relation obtenue à la question 2, que  $u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}$ .

(c) En déduire la nature de la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$ , puis la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ .

(d) Établir l'existence d'une constante strictement positive  $K$  telle que  $I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$ .

6. On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :  $J_n = \int_0^\pi e^{-t} \sin^n(t) dt$ .

(a) Déterminer un équivalent de  $J_{2n}$  en  $+\infty$  faisant intervenir  $K$ .

(b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $J_{2n+2} \leq J_{2n+1} \leq J_{2n}$ .

(c) En déduire un équivalent de  $J_{2n+1}$  puis de  $I_{2n+1}$  faisant intervenir  $K$ .

7. Les suites  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $(\sqrt{n}I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  sont-elles convergentes ?

## EXERCICE 2

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  muni du produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

- Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , de même dimension  $d$ .
- On note  $p_F$  le projecteur orthogonal sur  $F$  et  $p_G$  le projecteur orthogonal sur  $G$ .
- Soient  $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_d)$  et  $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_d)$  des bases orthonormées de  $F$  et de  $G$  respectivement. On note  $B$  la matrice de  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  dont le coefficient de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne est  $B_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle$ .

- (a) Vérifier que l'ensemble  $G$  est stable par  $p_G \circ p_F$ , c'est-à-dire que :  $\forall x \in G, (p_G \circ p_F)(x) \in G$ .  
 (b) Montrer que l'application  $\pi$  qui à tout élément  $x$  de  $G$  associe  $(p_G \circ p_F)(x)$  est un endomorphisme de  $G$ .  
 (c) Que vaut  $\pi$  si  $F = G$  ?  
 Que vaut  $\pi$  si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux ?

2. On suppose **dans cette question uniquement** que  $E = \mathbf{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, et que

$$F = \{(x, y, z) \in E / x + y = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in E / y + z = 0\}.$$

- Quelle est la valeur de  $d$  dans ce cas-là ?
- Déterminer une base orthonormée  $\mathcal{U}$  de  $F$  dont le premier vecteur est  $u_1 = (0, 0, 1)$ , et une base orthonormée  $\mathcal{V}$  de  $G$  dont le premier vecteur est  $v_1 = (1, 0, 0)$ .
- En déduire une expression de  ${}^tBB$ .
- Déterminer les valeurs propres de la matrice  ${}^tBB$ .

3. On revient au cas général dans cette question et les suivantes.

(a) Soit  $x \in G$ . Montrer que :  $(p_G \circ p_F)(x) = \sum_{i=1}^d \left( \sum_{k=1}^d \langle u_k, x \rangle \langle u_k, v_i \rangle \right) v_i$ .

(b) En déduire que la matrice de  $\pi$  dans la base  $\mathcal{V}$  est  ${}^tBB$ , puis que  $\pi$  est un endomorphisme symétrique de  $G$ .

(c) Montrer alors qu'il existe un unique  $d$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbf{R}^d$ , vérifiant,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  tel que la matrice

diagonale  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix}$  soit la matrice de  $\pi$  dans une base orthonormée de  $E$  que l'on note  $\mathcal{C}$ .

4. (a) Établir que pour tout vecteur  $x$  de  $G$  :

$$\langle x, \pi(x) \rangle = \langle x, p_F(x) \rangle = \|p_F(x)\|^2.$$

(b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\pi$ , et  $x$  un vecteur propre associé.

Montrer que :

$$\lambda \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2.$$

En déduire que  $\lambda \in [0, 1]$ .

5. En déduire que pour tout  $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , il existe un unique  $t_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , tel que  $\lambda_k = \cos^2(t_k)$  où les réels  $\lambda_k$  sont définis à la question 3.(c).

*Angle(F, G) désigne le  $d$ -uplet  $(t_1, \dots, t_d)$  que l'on peut définir pour tout couple  $(F, G)$  de sous-espaces vectoriels de  $E$  de même dimension  $d$ .*

6. Exemples :

(a) Montrer que  $Angle(F, G) = \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right)$  si et seulement si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux.

(b) Montrer que  $Angle(F, G) = (0, \dots, 0)$  si et seulement si  $F$  et  $G$  sont égaux.

(c) Déterminer  $Angle(F, G)$  si on reprend les hypothèses de la question 2.

## PROBLÈME

Dans tout le problème,  $p$  désigne un réel de  $]0, 1[$ .

On réalise une expérience aléatoire qui consiste à effectuer une suite de tests successifs  $t_1, \dots, t_n, \dots$  sur un objet de la manière suivante:

- Le test  $t_1$  est toujours effectué ;
- Pour tout  $i \in \mathbf{N}^*$ , sachant que le test  $t_i$  a été effectué, soit l'expérience s'arrête alors avec une probabilité  $p$ , soit elle continue avec une probabilité  $q = 1 - p$  et dans ce cas on réalise le test  $t_{i+1}$ .

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  qui modélise cette expérience et on note :

- $N$  la variable aléatoire réelle égale au nombre total de tests effectués lors de l'expérience ;
- Pour tout entier naturel  $i$  non nul,  $T_i$  la durée aléatoire du test  $t_i$  ;
- Pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $D_k = \sum_{i=1}^k T_i$  ;
- $D$  la durée totale de l'expérience, en supposant que seules les durées des tests effectués sont comptabilisées.

On suppose enfin que, pour tout entier naturel  $i$  non nul,  $T_i$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_i$ , et que cette durée est indépendante des durées des autres tests et de  $N$ .

**Partie 1 - Loi de  $D_k$**

1. Montrer que pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $D_k$  admet une espérance et donner une expression de celle-ci en fonction des  $\lambda_i$  où  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ .

2. Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.

On suppose **dans cette question uniquement** que :  $\forall i \in \mathbf{N}^*, \lambda_i = \lambda$ .

Déterminer pour tout entier  $k \geq 1$ , une densité de  $\lambda D_k$ , puis de  $D_k$ .

3. On ne suppose plus à présent que les réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  sont tous égaux.

On définit par récurrence les fonctions  $f_k$  pour tout  $k \geq 1$  par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, f_{k+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \int_0^x f_k(t) e^{\lambda_{k+1} t} dt & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $f_k$  est une densité de probabilité de  $D_k$  et que sa restriction à  $\mathbf{R}_+$  est continue.

(b) Donner une expression sans intégrale de  $f_2(x)$  pour tout réel  $x$ .

4. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2.

On suppose dans cette question que les réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  sont distincts 2 à 2.

On définit pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  le réel  $\ell_{i,k}$  et le polynôme  $L_i$  de  $\mathbf{R}[x]$  par :

$$\ell_{i,k} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (\lambda_i - \lambda_j)},$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, L_i(x) = \ell_{i,k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (x - \lambda_j).$$

On note enfin  $P$  le polynôme défini par :  $P = \sum_{i=1}^k L_i$ .

(a) Montrer que  $P \in \mathbf{R}_{k-1}[x]$ .

(b) Pour tout  $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , calculer  $P(\lambda_r)$ .

(c) En déduire que  $\sum_{i=1}^k L_i = 1$ , puis que  $\sum_{i=1}^k \ell_{i,k} = 0$ .

(d) Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel  $k \geq 2$  :

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (-1)^{k-1} \lambda_1 \dots \lambda_k \sum_{i=1}^k \ell_{i,k} e^{-\lambda_i x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

On suppose dans cette question que,  $\forall i \in \mathbf{N}^*, \lambda_i = \alpha i$ .

Soit  $k$  un entier naturel non nul.

(a) Montrer que  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \ell_{i,k} = \frac{(-1)^{k-i}}{(k-1)! \alpha^{k-1}} \binom{k-1}{i-1}$ .

(b) En déduire que pour  $x \geq 0, f_k(x) = k \alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x})^{k-1}$ .

(c) Déterminer  $F_k$  la fonction de répartition de  $D_k$ .

Partie 2 - Loi et espérance de  $D$

6. On suppose que l'on a défini la fonction Python `lamb(i)` qui prend en argument un entier  $i$  et qui renvoie la valeur de  $\lambda_i$ .  
Compléter le script suivant pour qu'il affiche une valeur aléatoire qui suit la même loi que  $D$  :

```
import numpy.random as rd
p=input('p=')
i=1 # numero du test
D=rd.exponential(1/lamb(1))
while rd.random() > ..... :
    i = i + .....
    D = D + .....
end
print(D)
```

7. (a) Donner la loi de  $N$ , et préciser son(ses) éventuel(s) paramètre(s).  
(b) En déduire que :

$$\forall x \geq 0, F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \mathbf{P}_{[N=k]}([D \leq x]),$$

puis que

$$\forall x \geq 0, F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} F_k(x).$$

8. (a) Montrer que pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $t \in \mathbf{R}_+$  :  $f_k(t) \leq \lambda_1$ .  
*Indication : On pourra utiliser la définition de la fonction  $f_k$  à la question 3.*  
(b) Montrer que pour tout réel  $t$ , la série  $\sum_{k \geq 1} pq^{k-1} f_k(t)$  converge.

Soit alors la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} f_k(t).$$

- (c) On admet, que la restriction de  $f$  à  $\mathbf{R}_+$  est continue.  
Montrer que pour tout  $x \geq 0$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$0 \leq \int_0^x f(t) dt - \sum_{k=1}^n pq^{k-1} \int_0^x f_k(t) dt \leq q^n \lambda_1 x$$

- (d) Montrer que la fonction  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  coïncide avec  $F_D$  sur  $\mathbf{R}_+$ .  
(e) En déduire que  $f$  est une densité de probabilité de  $D$ .

9. Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.  
On suppose **dans cette question uniquement** que  $\forall i \in \mathbf{N}^*, \lambda_i = \lambda$   
En utilisant le résultat de la question 2, établir que  $D$  suit la loi exponentielle de paramètre  $p\lambda$ .

10. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.  
On suppose **dans cette question uniquement** que  $\forall i \in \mathbf{N}^*, \lambda_i = \alpha i$ .

- (a) En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la fonction de répartition de  $D$ ,  $F_D$  est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{p}{p + qe^{-\alpha x}} (1 - e^{-\alpha x}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F_D(x)) dx$  converge et vaut  $-\frac{1}{\alpha q} \ln(p)$ .  
(c) Montrer que pour tout réel  $A > 0$ ,

$$\int_0^A t f_D(t) dt = -A(1 - F_D(A)) + \int_0^A (1 - F_D(t)) dt.$$

- (d) En déduire que  $D$  admet une espérance et préciser sa valeur en fonction de  $p$  et  $\alpha$ .