



SUJET ZÉRO

**MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
VOIE ECG**

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques approfondies - Sujet zéro 1

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de E , et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on notera F^\perp l'orthogonal de F pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Partie I

Dans cette partie, on note g l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A^2 , puis la matrice A^3 .
Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que : $A^3 = -\alpha^2 A$.
2. Démontrer que 0 est valeur propre de g , et déterminer un vecteur v_1 de norme 1 tel que (v_1) soit une base de l'espace propre de g associé à la valeur propre 0.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de g .
4. L'endomorphisme g est-il bijectif? Est-il diagonalisable?
5. On pose $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.
Démontrer que $v_2 \in (E_0(g))^\perp$, puis déterminer un vecteur v_3 tel que la famille (v_2, v_3) soit une base orthonormale de $(E_0(g))^\perp$.
6. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de E , et déterminer la matrice représentative de g dans la base \mathcal{C} .

Partie II

1. Pour tout endomorphisme f de E , démontrer que les deux propriétés (P1) et (P2) ci-dessous sont équivalentes :

$$\begin{aligned} (P1) & : \forall x \in E, \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \\ (P2) & : \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle. \end{aligned}$$

Un endomorphisme vérifiant les propriétés (P1) et (P2) est dit **anti-symétrique**.

2. Démontrer que l'endomorphisme g défini dans la partie précédente est anti-symétrique.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un endomorphisme f de E anti-symétrique.

L'objectif de cette partie est de démontrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice représentative de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

où α est un réel.

3. On veut démontrer par l'absurde que f n'est pas bijective.
On suppose donc que f est bijective.
Soit x un vecteur non nul de E , et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$.

- (a) Déterminer la dimension de F .
 - (b) Démontrer qu'il existe un vecteur y non nul de E tel que la famille $(x, f(x), y)$ est orthogonale.
 - (c) Démontrer alors que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
 - (d) Conclure.
4. Démontrer qu'il existe trois vecteurs : $e'_1, e'_2,$ et e'_3 de E tels que e'_1 appartient au noyau de f , et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de E .
5. (a) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' est anti-symétrique.
 (b) Conclure quant à l'objectif annoncé au début de cette partie.

Exercice 2

Partie I : Étude des intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n , on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$.

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Étudier les variations de la suite $(W_n)_{n \geq 0}$.
3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Dédire des questions précédentes que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n+1}$, puis que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Partie II : Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

2. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0.

(b) En déduire que : $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.

3. (a) Déterminer la nature de la série de terme général $(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ .

4. À l'aide des résultats de la partie I, déterminer la valeur de ℓ .

5. Démontrer alors la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Partie III : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 (te^{-t})^n dt$

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0, 1]$ par : $\forall t \in [0, 1], h(t) = te^{-t}$.
- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n .$$

- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Quelle est la nature de la série de terme général I_n ?

2. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Quelle est la loi de S_n ? En donner une densité.
- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{n!}{n^{n+1}} P(S_{n+1} \leq n) .$$

- (c) On rappelle que dans la librairie `numpy.random` importée sous `rd`, se trouve les commandes suivantes :

- ★ `rd.random()` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- ★ `rd.exponential(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$.
- ★ `rd.normal(0, 1)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
- ★ `rd.gamma(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi gamma de paramètre a .

Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle prenne en argument une valeur de n entière, simule 10 000 fois la réalisation de la variable aléatoire S_{n+1} et renvoie une valeur approchée de $P(S_{n+1} \leq n)$:

```
import numpy.random as rd
def proba(n):
    N=.....
    c=0
    for i in range(N) :
        S=.....
        if S<= n:
            c=.....
    return .....
```

- (d) Écrire alors un programme qui demande à l'utilisateur une valeur de n , puis calcule et affiche sous forme de liste les valeurs estimées de I_1, I_2, \dots, I_n .

Ce programme pourra faire appel à la fonction Python de la question précédente.

3. Pour tout entier n non nul, on pose :

- $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$,
- \bar{X}_n^* la variable aléatoire centrée réduite associée à \bar{X}_n ,
- $Y_n = \bar{X}_n^* + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- (a) Justifier que la suite $(\bar{X}_n^*)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi. On **admet** que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge alors également en loi vers la variable aléatoire Z .
- (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_{n+1} \leq n) = P(Y_{n+1} \leq 0)$.
- (c) En utilisant les questions précédentes, et la formule de Stirling rappelée dans la partie précédente, montrer alors que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}} .$$

Exercice 3

Pour tous entiers naturels a et b non nuls, et pour tout entier naturel r , on considère l'expérience aléatoire ci-dessous. Une urne contient initialement a boules blanches et b boules noires.

On effectue dans cette urne une infinité de tirages d'une boule, en procédant de la façon suivante : après chaque tirage, on remet la boule piochée dans l'urne et **on rajoute systématiquement r boules blanches** avant de procéder au tirage suivant. On note dans tout le problème X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire si on obtient au moins une boule noire dans l'expérience, et qui prend la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule noire.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « Lors des n premiers tirages, on n'obtient que des boules blanches. »

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+kr}{a+b+kr}$.
2. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\ln(P(A_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$.
3. Étudier la nature de la série $\sum_{k \geq 0} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$, puis calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $P(A_n)$.
4. Démontrer alors soigneusement que $P(X=0) = 0$.

Dans toute la suite du problème, on traduira ce résultat en supposant que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

5. Écrire une fonction Python qui prend en entrée les entiers a, b et r , simule les tirages dans l'urne jusqu'à l'obtention de la première boule noire et renvoie la valeur de X obtenue.
6. Écrire alors une fonction Python qui en prend en entrée les entiers a, b et r , et une valeur de N , qui simule N réalisations de la variable aléatoire X et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
7. On suppose dans cette question que $r = 0$.
Donner la loi de X .
Montrer que X admet une espérance et une variance, que l'on exprimera en fonction de a et b .
8. On suppose dans cette question que $a = b = r = 1$.
(a) Donner la loi de X .
(b) Démontrer que X n'admet pas d'espérance.

Partie II : Étude du cas $r = 1$

Dans cette partie, on pose $r = 1$ et on suppose que b est supérieur ou égal à 2.

1. On suppose de plus que $a = 1$.
(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{b \cdot b!}{n(n+1) \cdots (n+b)} = \frac{b \cdot (n-1)! \cdot b!}{(n+b)!}$$

- (b) On note (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+b-1)} = \frac{n!}{(n+b-1)!}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, nP(X = n) = \frac{b \cdot b!}{b-1} (v_n - v_{n+1})$.

- (c) En déduire que X admet une espérance, et que : $E(X) = \frac{b}{b-1}$.

On admettra que pour tout entier naturel a non nul, X admet une espérance.

2. Le réel a n'est plus supposé être égal à 1 mais seulement supérieur ou égal à 1.

On notera alors **et uniquement dans cette question** X_a la variable aléatoire X .

Soit B_1 l'événement : « On obtient une boule blanche au premier tirage ».

(a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}^*, E(X_a|B_1) = 1 + E(X_{a+1})$.

(b) Déterminer $E(X_a|\overline{B_1})$.

(c) Démontrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, E(X_a) = 1 + \frac{a}{a+b}E(X_{a+1}),$$

puis que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, E(X_a) = \frac{a+b-1}{b-1}.$$

Partie III

On revient au cas général où a , b et r sont des entiers naturels non nuls et on suppose cette fois que r est non nul.

On rappelle le résultat démontré dans la première partie :

$$\forall n \geq 1, -\ln(P(A_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right).$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = -\ln(P(A_n)) - \frac{b}{r} \ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge.

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

3. Démontrer que $P(A_n)$ est équivalent à $e^{-\ell} \cdot \frac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Démontrer que $nP(X = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{r} P(A_{n-1})$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X admette une espérance.