

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mardi 13 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est l'étude de la rentabilité du « surbooking » pour une compagnie aérienne.

Partie I : Expression de l'espérance du chiffre d'affaire

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.

Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour le vol 714 qui peut accueillir jusqu'à N passagers. La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80%, tandis qu'un acheteur qui se présente à l'embarquement mais n'obtient pas de place, le vol étant déjà complet, est remboursé à 200%.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement, soit Y la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement mais n'obtenant pas de place et soit G la variable aléatoire désignant le montant en **centaines** d'euros du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.

On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Préciser, pour tout élément ω de Ω , la valeur de $Y(\omega)$ en fonction de N et de $X(\omega)$, en distinguant les cas $X(\omega) > N$ et $X(\omega) \leq N$.
3. Écrire l'expression de G en fonction de n, X, Y .
4. On suppose, dans cette question seulement, que n est inférieur ou égal à N .
Calculer alors l'espérance $\mathbf{E}(G)$ de la variable aléatoire G .

La compagnie cherche alors à évaluer la probabilité $\mathbf{P}([X \geq N])$ et à savoir si le nombre n aurait pu être choisi de façon à optimiser son chiffre d'affaire.

Partie II : Approximations dans des cas particuliers

On reprend, dans cette partie les notations et les définitions de la Partie I.

1. On suppose, dans cette question, que p est égal à 0,5.

a) Soit X^* la variable aléatoire définie par : $X^* = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}$.

Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X^* .

b) Par quelle loi approcher la loi de X^* si n est assez grand ? Montrer qu'alors une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}([X \geq N])$ est $\Phi\left(\frac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$,

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $f(x) = \frac{x+1-2N}{\sqrt{x}}$.

Montrer que la fonction f est croissante.

d) On suppose que N est égal à 320 et on donne : $\Phi\left(\frac{7}{\sqrt{646}}\right) \approx 0,609$; $\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{645}}\right) \approx 0,592$.

Que peut-on en déduire pour $\mathbf{P}([X \geq N])$ si n est inférieur ou égal à 645, puis si n est supérieur ou égal à 646 ?

2. Pour tout entier naturel non nul m , on considère la fonction g_m définie sur \mathbb{R}_+ par

$$g_m(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$$

a) Montrer que la fonction dérivée de g_m est définie sur \mathbb{R}_+ par : $g'_m(x) = -e^{-x} \frac{x^m}{m!}$.

Montrer qu'elle vérifie la double inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}_+, -e^{-m} \frac{m^m}{m!} \leq g'_m(x) \leq 0$.

b) En déduire que, si a et b sont deux réels vérifiant $0 < a < b$, on a :

$$0 \leq g_m(a) - g_m(b) \leq (b-a)e^{-m} \frac{m^m}{m!}$$

3. On suppose, dans cette question, que p est égal à 0,99 et que n est strictement supérieur à N .

a) Préciser la loi de la variable aléatoire $n - X$.

b) On supposera, dans les prochains calculs, que la loi de la variable aléatoire $n - X$ peut être remplacée par la loi de Poisson de paramètre $0,01n$ dont on note F la fonction de répartition. Que vaut alors $\mathbf{P}([X \geq N])$?

c) Exprimer le nombre $F(n - N)$ à l'aide d'une fonction g_m particulière de la question 2.

d) On suppose que N est égal à 300.

Pour tout réel strictement positif α , on note F_α la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre α et on donne :

$$F_3(2) \approx 0,423 ; \quad F_3(3) \approx 0,647 ; \quad e^{-3} \frac{3^3}{3!} \approx 0,224$$

Montrer que, si n est égal à 302, $\mathbf{P}([X \geq N])$ est au plus égal à 0,5 et que, si n est égal à 303, $\mathbf{P}([X \geq N])$ est strictement supérieur à 0,6.

Partie III : Étude d'une suite de variables aléatoires

On suppose, dans cette partie, que N est un entier naturel supérieur ou égal à 2, que p un réel strictement compris entre 0 et 1 et que $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p , indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = \sum_{k=1}^n T_k$ et on définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ les variables aléatoires Y_n et G_n par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) - N & \text{si } X_n(\omega) \geq N + 1 \\ 0 & \text{si } X_n(\omega) \leq N \end{cases}$$

$$\text{et } G_n = 0,2n + 0,8X_n - 2Y_n$$

1. a) Soit n un entier naturel non nul. Préciser la loi de X_n .
- b) Que peut-on dire de la variable aléatoire Y_n dans le cas $n \leq N$?
- c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .
- d) Préciser les valeurs que peut prendre Y_n dans le cas $n > N$.
- e) Pour tout entier naturel n non nul, comparer les événements $[X_n \geq N]$ et $[X_{n+1} \geq N]$.
En déduire que la suite $(\mathbf{P}[X_n \geq N])_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.
- f) Prouver, pour tout entier naturel n non nul et tout réel strictement positif ε , l'inégalité :

$$\mathbf{P}([X_n - np \geq -\varepsilon]) \geq 1 - \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}$$

- g) Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{np(1-p)}{(np-N)^2}$; en déduire l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([X_n \geq N]) = 1$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

- a) Montrer que la variable $Y_{n+1} - Y_n$ est une variable de Bernoulli et justifier l'égalité des événements $[Y_{n+1} - Y_n = 1]$ et $[T_{n+1} = 1] \cap [X_n \geq N]$.

- b) En déduire les égalités : $\mathbf{E}(Y_{n+1}) - \mathbf{E}(Y_n) = p \mathbf{P}([X_n \geq N])$

$$\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n) = 0,2 + 0,8p - 2p \mathbf{P}([X_n \geq N])$$

- c) Étudier la variation sur $]0, 1[$ de la fonction $x \mapsto \frac{0,2 + 0,8x}{x}$.

- d) Montrer que, si p est inférieur ou égal à $\frac{1}{6}$, la suite $(\mathbf{E}(G_n))_{n \geq 1}$ est croissante.

3. On suppose, dans cette question, que p est strictement supérieur à $\frac{1}{6}$.

- a) Comparer les nombres $\frac{0,2 + 0,8p}{2p}$ et 1, puis montrer qu'il existe un entier naturel n_0 supérieur ou égal à N , vérifiant :

$$\mathbf{P}([X_{n_0} \geq N]) > \frac{0,2 + 0,8p}{2p} \quad \text{et} \quad \forall n < n_0, \mathbf{P}([X_n \geq N]) \leq \frac{0,2 + 0,8p}{2p}$$

- b) En déduire que la valeur maximale de la suite $(\mathbf{E}(G_n))_{n \geq 1}$ est obtenue pour $n = n_0$. On note M cette valeur maximale.

- c) Calculer $\mathbf{E}(G_N)$ et en déduire l'inégalité : $M \geq (0,2 + 0,8p)N$.

4. On suppose à nouveau, dans cette question, que p est strictement supérieur à $\frac{1}{6}$.
- Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $\mathbf{E}(G_n) \leq n(0,2 + 0,8p)$.
 - Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N , l'égalité :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=N}^n (k - N) \mathbf{P}([X_n = k])$$

- En déduire, pour $n \geq N$, les inégalités $\mathbf{E}(Y_n) \geq np - N$ puis $\mathbf{E}(G_n) \leq 0,2n(1 - 6p) + 2N$.
 - Comparer les nombres $n(0,2 + 0,8p)$ et $0,2n(1 - 6p) + 2N$.
 - En déduire l'inégalité : $M \leq N \frac{0,2 + 0,8p}{p}$.
5. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$ et que N est égal à 320 .
En remarquant que, pour n fixé, la variable aléatoire X_n suit la même loi que la variable aléatoire X de la partie I. et en exploitant les résultats de la question 1. de la Partie II., déterminer la valeur de n_0 et donner un encadrement pour M .
6. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que N est égal à 300 .
On a alors : $\frac{0,2 + 0,8p}{2p} \approx 0,501$.
En exploitant les résultats de la question 3. de la Partie II., déterminer la valeur de n_0 et donner un encadrement pour M .

Partie IV : Programmation des calculs utiles

On reprend, dans cette partie, les notations et les définitions de la Partie III.

1. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturel, on définit un nombre réel $a(i, j)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} a(0, 0) = 1 & \text{et } a(0, j) = 0 & \text{si } j \geq 1 \\ a(i, j) = \mathbf{P}([X_i \geq j]) & & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

- Donner la valeur de $a(i, 0)$ pour tout entier naturel i .
 - Prouver, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels non nuls, l'égalité :
$$a(i, j) = pa(i - 1, j - 1) + (1 - p)a(i - 1, j)$$
 - Tracer un tableau donnant les valeurs de $a(i, j)$ pour $0 \leq i \leq 4$ et $0 \leq j \leq 3$, dans le cas particulier où p est égal à $0,5$.
2. Un programme écrit en Pascal comporte les déclarations suivantes :

```
CONST p=0.5 ;
      N=320 ;
VAR A :ARRAY[0..N] OF REAL ;
PROCEDURE Init ;
  VAR j :INTEGER ;
  BEGIN
    A[0] :=1 ;
    FOR j := 1 TO N DO A[j] :=0
  END ;
PROCEDURE Calcul ;
  VAR j :INTEGER ;
  BEGIN
    FOR j := N DOWNT0 1 DO A[j] :=(1-p)*A[j]+p*A[j-1]
  END ;
```

- Soit k un entier naturel non nul. On suppose que, dans le programme principal, la procédure `Init` est appelée une fois et la procédure `Calcul` k fois : que contient le tableau `A` après exécution du programme ?
- Écrire un programme principal faisant appel aux procédures ci-dessus, permettant de calculer et d'afficher les nombres n_0 et M définis dans la question 3.a de la Partie III.