

## ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

### Concours d'admission sur classes préparatoires

## MATHÉMATIQUES

### Option économique

Mercredi 3 mai 2000, de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

### Exercice 1

1) Déterminer l'ensemble  $D$  des réels  $x$  tels que  $e^x - e^{-x} > 0$ .

On définit la fonction  $f$  par :  $\forall x \in D, f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$ .

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

2) a. Étudier les variations de  $f$  et donner les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ .

b. En déduire l'existence d'un unique réel  $\alpha$  vérifiant  $f(\alpha) = 0$ , puis donner la valeur exacte de  $\alpha$ .

c. Montrer que le coefficient directeur de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $\alpha$  vaut  $\sqrt{5}$ .

3) a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ .

b. En déduire l'équation de l'asymptote  $(\Delta)$  à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

c. Donner la position relative de  $(\Delta)$  et  $(C)$ .

4) Donner l'allure de la courbe  $(C)$  en faisant figurer les droites  $(\Delta)$  et  $(T)$ .

On admettra que  $\alpha \approx 0,5$  et que  $\sqrt{5} \approx 2,2$ .

5) Soit  $\lambda$  un réel, on note  $g_\lambda$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} g_\lambda(x) = 0 & \text{si } x < \alpha \\ g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

a. On pose  $h(x) = f(x) - x$ . Après avoir calculé  $h'(x)$ , déterminer  $\lambda$  en fonction de  $\alpha$  pour que  $g_\lambda$  soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire  $X$ .

b. Donner la fonction de répartition  $G_\lambda$  de  $X$ .

## Exercice 2

Soit la matrice  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On note  $E$  l'ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant :  $MK = KM = M$ .

- 1) a. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.
- b. Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de  $E$  n'est inversible.

2) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$  une matrice de  $E$ .

- a. Montrer que :  $k = g = c = a$ ,  $h = b$  et  $f = d$ , puis en déduire la forme des matrices de  $E$ .
- b. Retrouver le fait que les matrices de  $E$  ne sont pas inversibles.
- c. Déterminer une base de  $E$  et vérifier que  $\dim E = 4$ .

3) On considère l'ensemble  $F$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$  où  $x, y$  et  $z$  sont des réels.

- a. Vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et donner une base de  $F$ .
- b. Les matrices de  $F$  sont-elles diagonalisables ?
- c. Dans cette question, on appelle  $U$  la matrice de  $F$  telle que :  $x = 3$ ,  $y = 2$  et  $z = 4$ .  
Trouver les valeurs propres de  $U$  et exhiber un vecteur colonne propre pour chacune d'entre elles.

4) On note  $\varphi$  l'application de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  qui à toute matrice  $A$  de  $F$  associe le nombre

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j}, \text{ où } a_{i,j} \text{ désigne l'élément de la matrice } A \text{ situé à l'intersection de}$$

la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

- a. Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}$ .
- b. Déterminer  $\text{Im } \varphi$ . En déduire que  $\text{Ker } \varphi$  est de dimension 2.

c. Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$  une matrice de  $\text{Ker } \varphi$ .

Exprimer  $\varphi(M)$  en fonction de  $x, y$  et  $z$  et en déduire une base de  $\text{Ker } \varphi$ .

### Exercice 3

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on définit la fonction  $f_n$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

- 1) a. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  n'a qu'une seule solution strictement positive, notée  $u_n$ .  
b. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
c. Vérifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in ]0, \frac{2}{3}[$ .
- 2) a. Montrer que, pour tout  $x$  élément de  $]0, 1[$ , on a :  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ .  
b. En déduire le signe de  $f_n(u_{n+1})$ , puis les variations de la suite  $(u_n)$ .  
c. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
- 3) a. Déterminer la limite de  $(u_n)^n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
b. Donner enfin la valeur de  $\ell$ .
- 4) Montrer que la série de terme général  $\frac{2}{3} - u_n$  est convergente.

### Problème

On lance indéfiniment une pièce donnant "Pile" avec la probabilité  $p$  et "Face" avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On suppose que  $p \in ]0, 1[$  et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel  $k$ , supérieur ou égal à 2, on dit que le  $k^{\text{ème}}$  lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du  $(k-1)^{\text{ème}}$  lancer.

On note  $P_k$  (resp  $F_k$ ) l'événement : « on obtient "Pile" (resp "Face") au  $k^{\text{ème}}$  lancer ».

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple,  $P_1 F_2$  à la place de  $P_1 \cap F_2$ .

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les  $n$  premiers lancers.

#### Partie 1 : étude de quelques exemples.

- 1) Donner la loi de  $X_2$ .
- 2) a. Donner la loi de  $X_3$ .  
b. Vérifier que  $E(X_3) = 4pq$  et que  $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$ .
- 3) a. Trouver la loi de  $X_4$ .  
b. Calculer  $E(X_4)$ .

**Partie 2 : étude du cas  $p \neq q$ .**

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 1) Exprimer  $P(X_n = 0)$  en fonction de  $p$ ,  $q$  et  $n$ .
- 2) En décomposant l'événement  $(X_n = 1)$  en une réunion d'événements incompatibles, montrer que 
$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p} (q^{n-1} - p^{n-1}).$$
- 3) En distinguant les cas  $n$  pair et  $n$  impair, exprimer  $P(X_n = n-1)$  en fonction de  $p$  et  $q$ .
- 4) Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de  $X_3$  et  $X_4$ .
- 5) Pour tout entier naturel  $k$ , supérieur ou égal à 2, on note  $Z_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le  $k^{\text{ème}}$  lancer est un changement et 0 sinon ( $Z_k$  est donc une variable de Bernoulli). Écrire  $X_n$  à l'aide de certaines des variables  $Z_k$  et en déduire  $E(X_n)$ .

**Partie 3 : étude du cas  $p = q$ .**

- 1) Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que  $X_3$  et  $X_4$  suivent chacune une loi binomiale.
- 2) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $X_n$  suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.