

**ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD**

**Concours d'admission sur classes préparatoires**

**MATHEMATIQUES**

**Option économique**

**Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

**Exercice 1**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note  $I$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on pose  $u = (2, 1, -2)$ .

1) a) Montrer que  $\text{Ker } f = \text{vect}(u)$ .

b) La matrice  $A$  est-elle inversible ?

2) a) Déterminer le vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont la 2<sup>ème</sup> coordonnée dans  $\mathcal{B}$  vaut 1, et tel que  $f(v) = u$ .

b) Démontrer que le vecteur  $w$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont la 2<sup>ème</sup> coordonnée dans  $\mathcal{B}$  vaut 1, et qui vérifie  $f(w) = v$  est  $w = (0, 1, -1)$ .

c) Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  que l'on notera  $\mathcal{B}'$ . On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

3) a) Écrire la matrice  $N$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$ . En déduire la seule valeur propre de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

b) Donner la relation liant les matrices  $A, N, P$  et  $P^{-1}$ , puis en déduire que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 3, on a :  $A^k = 0$ .

4) On note  $C_N$  (respectivement  $C_A$ ) l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $N$  (respectivement  $A$ ).

a) Montrer que  $C_N$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et que  $C_N = \text{vect}(I, N, N^2)$ .

On admet que  $C_A$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

b) Établir que :  $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$ . En déduire que  $C_A = \text{vect}(I, A, A^2)$ .

Quelle est la dimension de  $C_A$  ?

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1) Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et admettant la fonction  $f$  pour densité.

2) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

3) Montrer que  $X$  a une espérance et que celle-ci vaut  $\frac{1}{2}$ .

4) a) Déterminer  $E((X-1)^2)$ .

b) En déduire que  $X$  a une variance et que  $V(X) = \frac{3}{4} - \ln 2$ .

5) On appelle variable indicatrice d'un événement  $A$ , la variable de Bernoulli qui vaut 1 si  $A$  est réalisé et 0 sinon.

On considère maintenant la variable aléatoire  $Y$ , indicatrice de l'événement  $(X \leq \frac{1}{2})$  et la variable aléatoire  $Z$ , indicatrice de l'événement  $(X > \frac{1}{2})$ .

a) Préciser la relation liant  $Y$  et  $Z$  puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de  $Y$  et  $Z$ , noté  $\rho(Y, Z)$ , est égal à  $-1$ .

b) En déduire la valeur de la covariance de  $Y$  et  $Z$ .

## Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$ .

1) a) Calculer les dérivées partielles premières de  $f$ .

b) En déduire que le seul point critique de  $f$  est  $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ .

2) a) Calculer les dérivées partielles secondes de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  présente un minimum local en  $A$  et donner la valeur  $m$  de ce minimum.

3) a) Développer  $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$ .

b) En déduire que  $m$  est le minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

4) On considère la fonction  $g$  définie pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :  $g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$ .

a) Utiliser la question 3) pour établir que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$ .

b) En déduire que  $g$  possède un minimum global sur  $\mathbb{R}^2$  et préciser en quel point ce minimum est atteint.

## Problème

### Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que :  $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geq m) > 0$ .

On suppose également que  $X$  vérifie :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geq m)}(X \geq n+m) = P(X \geq n)$ .

On pose  $P(X=0) = p$  et on suppose que  $p > 0$ .

1) On pose  $q = 1-p$ . Montrer que  $P(X \geq 1) = q$ . En déduire que  $0 < q < 1$ .

2) Montrer que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geq n+m) = P(X \geq m)P(X \geq n)$ .

3) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $u_n = P(X \geq n)$ .

a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique.

b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $P(X \geq n)$  en fonction de  $n$  et de  $q$ .

c) Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1)$ .

d) En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $P(X = n) = q^n p$ .

4) a) Reconnaître la loi suivie par la variable  $X+1$ .

b) En déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et telle que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, P(Y \geq n) > 0$ ,

on définit le taux de panne de  $Y$  à l'instant  $n$ , noté  $\lambda_n$ , par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$ .

1) a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$ .

b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}$ .

c) Établir alors que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1$ .

d) Montrer par récurrence, que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$ .

2) a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n)$ .

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y \geq n) = 0$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty$ .

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général  $\lambda_n$ .

3) a) Compléter la déclaration de fonction récursive suivante pour qu'elle renvoie la valeur de  $n!$  lorsqu'on appelle  $f(n)$ .

```
Function f(n : integer) : integer ;
Begin
If (n = 0) then f := -----
else f := ----- ;
end ;
```

b) On considère la déclaration de fonction récursive suivante :

```

Function  $g(a : \text{real} ; n : \text{integer}) : \text{real} ;$ 
Begin
If  $(n = 0)$  then  $g := 1$ 
           else  $g := a * g(a, n-1) ;$ 
end ;

```

Dire quel est le résultat retourné à l'appel de  $g(a, n)$ .

c) Proposer un programme (sans écrire la partie déclarative) utilisant ces deux fonctions et permettant d'une part le calcul de la somme  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$  et d'autre part, à l'aide du résultat de la question 1a), le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant  $n$  d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $a > 0$ , lorsque  $n$  et  $a$  sont entrés au clavier par l'utilisateur (on supposera  $n \geq 1$ ).

d) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle renvoie la valeur de  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$  à l'appel de  $sigma(a, n)$ .

```

Function  $sigma(a : \text{real} ; n : \text{integer}) : \text{real} ;$ 
  var  $k : \text{integer} ;$ 
       $p : \text{real} ;$ 
Begin
   $p := 1 ; s := 1 ;$ 
  For  $k := 1$  to  $n-1$  do begin  $p := p * a / k ; s := \dots ;$  end ;
   $s := \dots ;$ 
   $sigma := s ;$ 
end ;

```

### Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de $X$ .

1) Déterminer le taux de panne de la variable  $X$  dont la loi a été trouvée à la question 3d) de la partie 1.

2) On considère une variable aléatoire  $Z$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$ . On suppose que le taux de panne de  $Z$  est constant, c'est-à-dire que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$ .

a) Montrer que  $0 < \lambda < 1$ .

b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , déterminer  $P(Z \geq n)$  en fonction de  $\lambda$  et  $n$ .

c) Conclure que les seules variables aléatoires  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont le taux de panne est constant et telles que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $P(Z \geq n) > 0$ , sont les variables dont la loi est du type de celle de  $X$ .