

**ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD**

**Concours d'admission sur classes préparatoires**

**MATHEMATIQUES**

**Option économique**

**Vendredi 7 mai 2010 de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

**Exercice 1**

On considère la fonction  $f$  définie, pour tout couple  $(x, y)$  de l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , par :

$$f(x, y) = (x + y) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

1) Montrer que, pour tout couple  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \text{ et } f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

2) Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

3) Montrer que  $f$  possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4) Déterminer les dérivées partielles secondes de  $f$  et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de  $f$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

5) a) Comparer les réels  $(x + y)^2$  et  $4xy$ .

b) En déduire que  $f$  admet sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6) Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , par :

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y).$$

Montrer que :  $\forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,  $g(x, y) \geq 2\ln(2)$ .

## Exercice 2

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \prod_{k=0}^n (1 + \frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{2^n})$ .

- 1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2) a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq 2$ .  
b) Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  puis en déduire les variations de la suite  $(u_n)$ .
- 3) a) Établir que, pour tout réel  $x$  strictement supérieur à  $-1$ , on a :  $\ln(1 + x) \leq x$ .  
b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , un majorant de  $\ln(u_n)$ .
- 4) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , élément de  $[2, e^2]$ .
- 5) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général  $(\ell - u_n)$ .  
a) Justifier que la suite  $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que l'on a :  $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k})$ .  
b) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $\ln(\frac{\ell}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k})$ .  
c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ln(\frac{\ell}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}$ .  
d) Déduire de la question précédente que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$ .  
e) Justifier que, pour tout réel  $x$ , on a :  $1 - e^{-x} \leq x$ . En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$ .

Conclure quant à la nature de la série de terme général  $(\ell - u_n)$ .

## Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

- 1) a) Vérifier que  $f$  est une fonction paire.  
b) Montrer que  $f$  peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , admettant  $f$  comme densité. On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ .

- 2) La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ?
- 3) On pose  $Y = \ln(|X|)$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On note  $F_Y$  sa fonction de répartition.  
a) Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$ .  
b) Montrer, sans expliciter la fonction  $F_Y$ , que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de  $Y$  et vérifier que  $Y$  suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

4) a) Montrer que, si  $x$  est positif, alors  $1 - e^{-x}$  appartient à  $[0, 1[$  et montrer que, si  $x$  est strictement négatif, alors  $1 - e^{-x}$  est strictement négatif.

b) On considère une variable aléatoire  $U$  suivant la loi uniforme sur  $[0, 1[$ . Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z = -\ln(1 - U)$  et reconnaître la loi de  $Z$ .

c) Simulation informatique de la loi de  $Y$ . On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction `random` permet de simuler la loi uniforme sur  $[0, 1[$ . Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de  $Y$ .

```

Function expo : real ;
  Begin
  expo := ----- ;
  End ;

```

## Problème

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par les égalités suivantes:

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \text{ et } f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1.$$

### Partie 1 : étude de $f$ .

- 1) a) Écrire la matrice  $M$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ .
- b) Déterminer la dimension de  $\text{Im} f$  puis celle de  $\text{Ker} f$ .
- c) Donner alors une base de  $\text{Ker} f$ , puis en déduire une valeur propre de  $f$  ainsi que le sous-espace propre associé.
- d) Déterminer les autres valeurs propres de  $f$  ainsi que les sous-espaces propres associés.
- e) En déduire que  $f$  est diagonalisable.

2) On pose  $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Justifier sans calcul que  $P$  est inversible, puis déterminer la matrice  $D$  diagonale telle que :  $M = PDP^{-1}$ .
- b) Calculer  $PQ$  puis en déduire  $P^{-1}$ .
- c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $j$ , on a :  $M^j = PD^j P^{-1}$ .
- d) Écrire, pour tout entier naturel  $j$  non nul, la première colonne de la matrice  $M^j$ . Vérifier que ce résultat reste valable si  $j = 0$ .

### Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $X_k$  est définie après le  $k^{\text{ème}}$  tirage.
- On procède au 1<sup>er</sup> tirage et  $X_1$  prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le  $k^{\text{ème}}$  tirage ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) :

Soit  $X_k$  a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au  $(k + 1)^{\text{ème}}$  tirage et  $X_{k+1}$  prend la valeur du numéro obtenu à ce  $(k + 1)^{\text{ème}}$  tirage.

Soit  $X_k$  a pris une valeur  $j$ , différente de 1, dans ce cas on procède également au  $(k + 1)^{\text{ème}}$  tirage et  $X_{k+1}$  prend la valeur  $j$  si la boule tirée porte le numéro  $j$  et la valeur 1 sinon.

1) Reconnaître la loi de  $X_1$ .

2) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

On rappelle que  $\text{random}(n)$  renvoie un entier compris entre 0 et  $n-1$ .

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable aléatoire  $X_k$ , l'entier naturel  $k$  étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
Program simul ;
Var i, k, X, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(k) ; X := random(3) + 1 ;
For i := 2 to k do begin
tirage := random(3) + 1 ;
If X = 1 then X := -----
Else If tirage <> X then X := ----- ;
end ;

Writeln (X) :
end.
```

3) On note  $U_k$  la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne est  $P(X_k = i)$ .

a) Déterminer les probabilités  $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$ , pour tout couple  $(i, j)$  de  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ .

b) On admet que  $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$  est un système complet d'événements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , telle que, pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :  $U_{k+1} = AU_k$ .

c) Montrer qu'en posant  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $U_k = A^k U_0$ .

4) a) Vérifier que  $A = M + \frac{1}{3}I$ , puis établir que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$ .

b) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice  $A^k$ , puis vérifier que la loi de  $X_k$  est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right), P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

c) Montrer que la suite  $(X_k)$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$  dont on donnera la loi.

5) a) Calculer l'espérance  $E(X_k)$  de  $X_k$ .

b) Écrire une fonction Pascal, notée  $\text{esp}$ , qui renvoie  $E(X_k)$  à l'appel de  $\text{esp}(k)$ .