



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE ÉPREUVE :

289

HEC_M3_E

OPTION : ECONOMIQUE

MATHÉMATIQUES III

Mercredi 18 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE.

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et Id l'application identité de E .

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation (*) : $f \circ f = 4\text{Id}$.

A. Étude du cas $n = 2$.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit u le vecteur de \mathbb{R}^2 défini par $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f vérifie l'équation (*), puis préciser le noyau et l'image de f .

2. On note $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u . En déduire la dimension de F et donner une base de F .

b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2 .

3. Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation (*).

1.a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f .

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f .

c) Vérifier que 2Id et -2Id satisfont l'équation (*).

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\text{Id}$ et $f \neq -2\text{Id}$, et on note $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$.

2. Soit x un élément de E . Montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\text{Ker}(f + 2\text{Id})$ et que $(f(x) + 2x)$ appartient à F . En déduire que $G \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id})$ et que $\text{Im}(f + 2\text{Id}) \subset F$.

Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f .

3. Soit x un vecteur de $\text{Ker}(f + 2\text{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\text{Id})(x)$ en fonction de x uniquement. En déduire que x appartient à G , puis que $G = \text{Ker}(f + 2\text{Id})$.

b) Montrer que f est diagonalisable.

PROBLÈME.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n , dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.

On dira qu'on a obtenu *une paire* lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise.

1. Dans cette question, on effectue les tirages *avec remise* jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Préciser l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui modélise cette expérience.

b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.

Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

2. Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `pgrm1(n : integer) : integer` qui modélise l'expérience précédente.

3. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages *avec remise* jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a) Calculer, pour tout k de \mathbb{N}^* , $P(U = k)$. En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1. Reconnaître la loi de U .

b) Déterminer la loi conjointe du couple (U, Z) .

c) Montrer que, pour tout k de \mathbb{N}^* , $P(Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell$.

d) Calculer $P(Z = 1)$. Montrer que $P(Z = 0) = \frac{1}{3}$.

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question c) pour $k = i + 1$, justifier, pour tout i de \mathbb{N}^* , l'égalité : $P(Z = i + 1) = \frac{1}{4}P(Z = i + 1) + \frac{1}{4}P(Z = i)$.

f) En déduire la loi de Z .

Partie II. Tirages sans remise.

Dans cette partie, les tirages se font *sans remise* dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers.

1. Déterminer la loi de X_1 .

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ? On précisera pour chaque valeur prise par X_2 , l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir.

En déduire la loi de X_2 .

B. Étude du cas général.

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

1. a) Décrire l'univers Ω des événements observables.
- b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.
- c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n .

Pour tout entier naturel k , on note $a(n, k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$. Par convention, $a(0, 0) = 1$.

2. a) Préciser la valeur de $\sum_{j=0}^n a(n, j)$.

b) Déterminer $a(n, n)$ et $a(n, n-1)$.

3. a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n, j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!}$$

En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} = n!$$

Donner l'expression de $a(n, 0)$ en fonction des nombres $(a(j, 0))_{0 \leq j \leq n-1}$.

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.

Justifier l'égalité : $\binom{j}{i} \binom{k}{j} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i}$, puis montrer que $\sum_{j=i}^k (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = 0$.

En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j}$$

4. a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.

On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j, 0) = j! \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i!$$

Montrer l'égalité :

$$a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!$$

(On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n, 0)$ trouvée dans la question 3.a)

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k , la valeur de $a(k, 0)$.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font *sans remise dans l'urne blanche* et *avec remise dans l'urne noire*, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

1.a) Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n .

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une constante fixée.

2. Définir un type tableau de n entiers noté `tab`, puis deux variables de type `tab`, dont les identificateurs sont `blanc` et `noir`.

3. a) Soit `s` un tableau de type `tab`. Écrire une procédure dont l'en-tête est `ECHANGE(Var s :tab ; i, j :integer)` qui échange les éléments `s[i]` et `s[j]` du tableau `s`.

b) On considère les lignes de programme suivantes utilisant la procédure ECHANGE.

```
Begin
For i :=1 to n do blanc[i] :=i ;
For i :=1 to n-1 do
  Begin
    j :=RANDOM(n+1-i)+i ;
    ECHANGE(blanc,i,j) ;
  end ;
writeln ;
For i :=1 to n do write(blanc[i], ' ')
end
```

Expliquer le fonctionnement de ce programme et son résultat.

On précisera ce qui se passe au premier passage puis au i -ème passage dans la deuxième boucle For, et en particulier, la raison pour laquelle on écrit l'instruction $j :=RANDOM(n+1-i)+i$.

c) Construire une procédure qui s'appellera INITIALISE permettant de simuler le tirage sans remise et au hasard des n boules numérotées, en mettant dans la variable $s[i]$ le numéro de la i -ème boule tirée (On pourra s'inspirer de la question précédente).

4. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette partie III lorsque $n = 20$, puis de donner la valeur de X_n (Il n'est pas nécessaire ici de recopier les procédures ECHANGE et INITIALISE).