

1

Mathématiques

Option Scientifique

■ Mercredi 20 avril 2011 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :
8h00 – 13h20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

Ecricome Option Scientifique sujet principal

EXERCICE 1.

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier naturel j , on note $P^{(j)}$ la dérivée j -ième de P .

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) Prouver que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E .
- (b) Montrer que pour tout entier k appartenant à $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$P'_k(X+1) = P_{k-1}(X)$$

puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leq j \leq k \leq n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.

- (c) Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n = \sum_{k=0}^n a_k P_k$$

puis établir que :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j.$$

Ainsi on a établi la relation :

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{l=0}^n P^{(l)}(l) P_l.$$

2. On considère l'application u définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X+1).$$

- (a) Etablir que u est un endomorphisme de E .
- (b) Ecrire la matrice A de l'endomorphisme u dans la base (P_0, P_1, \dots, P_n) de E .

- (c) Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.
 (d) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Une réponse argumentée est attendue)

3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E. \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k).$$

- (a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
 (b) Justifier que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base orthonormale de E .

EXERCICE 2.

On considère :

- la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*. \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t) - 1}{t} - t \left(\exp\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right).$$

- la fonction ψ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

- U l'ouvert de \mathbb{R}^2 défini par :

$$U =]0, +\infty[^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'ouvert U et à valeurs réelles par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^y - y^x = \exp(y \ln(x)) - \exp(x \ln(y)).$$

où $\exp(s)$ désigne l'exponentielle du réel s c'est-à-dire que $\exp(s) = e^s$. On admet que f est de classe C^2 sur U .

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction f n'admet aucun extremum sur U .

- Etudier les variations de ψ sur \mathbb{R}_+^* , calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ .

Tournez la page s.v.p.

2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.
3. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$. On admettra la convergence de cette série.
4. Justifier que :

$$\forall t \in]0, 1[. \quad \varphi(t) < \ln(t), \quad \forall t \in]1, +\infty[, \quad \varphi(t) > \ln(t).$$

5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} x > 1, & y > 1; \\ \ln(x) \ln(y) = 1; \\ y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x). \end{cases}$$

6. Soit $(x, y) \in U$ un point critique de f . Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\begin{cases} x = \exp(t), & y = \exp\left(\frac{1}{t}\right); \\ \varphi(t) = \ln(t). \end{cases}$$

7. Prouver que (e, e) est l'unique point critique de f .
8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e+t)$ et $t \mapsto f(e+t, e)$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U .

PROBLEME

La partie **I** consiste à justifier que les variables $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$ possèdent la même loi lorsque (X_1, \dots, X_n) est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

La partie **II** a pour objectif d'établir que, pour chaque variable aléatoire X possédant une densité f avec f continue sur \mathbb{R}_+ et f nulle sur \mathbb{R}_- , il n'existe aucune variable aléatoire Y à densité dérivable g sur \mathbb{R}^* , nulle sur \mathbb{R}_- et vérifiant $g-g' = f$.

La partie **III** consistera à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de l'application

linéaire introduite à la partie II.

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n .

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit X une variable aléatoire, rappelons que :

- F_X désigne sa fonction de répartition définie par : $\forall t \in \mathbb{R}. F_X(t) = P(X \leq t)$.
- X suit la loi exponentielle de paramètre $a \in]0, +\infty[$ si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ 1 - \exp(-at) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

où $\exp(y)$ désigne l'exponentielle du réel y c'est-à-dire que : $\exp(y) = e^y$.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

$$Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}.$$

où $\max(X_1, \dots, X_n)$ désigne le maximum des valeurs de X_1, \dots, X_n .

Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 & \text{si } t < 0; \\ f_n(t) = n \cdot \exp(-t) (1 - \exp(-t))^{n-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. On considère un tableau X de nombres réels de taille 2011 (c'est-à-dire « $X = \text{array}[1...2011] \text{ of real}$ ») préalablement rempli.

(a) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant les réels :

$$\max(X[1], X[2]) \quad \text{et} \quad \max(X[1], X[2], X[3]).$$

Tournez la page s.v.p.

(b) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant le réel :

$$\max (X [1] . X [2] , \dots X [2011]) = \max_{1 \leq i \leq 2011} (X [i]) .$$

2. (a) Pour tout réel t , exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t), \dots, F_{X_n}(t)$.
 (b) Pour tout réel t , donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et t en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geq 0$.
 (c) Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n .
3. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{X_{n+1}}{n+1}$.
 (b) Démontrer que $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1} .
4. Pour tout réel x , vérifier que : $\int_0^x n \cdot \exp (nt) (1 - \exp (-t))^{n-1} dt = (\exp (x) - 1)^n$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité. **Indication** : Pour l'hérédité, on remarquera que $Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continues de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. On admet que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Pour toute fonction f appartenant à E , on considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{D}_f) : y - y' = f$$

dont l'inconnue est la fonction $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur \mathbb{R}_+ . On fixe dans cette partie une fonction f appartenant à E . Pour tout réel positif x , on note :

$$k_f(x) = \exp (x) \int_x^{+\infty} \exp (-t) f(t) dt .$$

1. Soient φ, ψ deux fonctions appartenant à E , dérivables sur \mathbb{R}_+ et vérifiant l'équation (\mathcal{D}_f) . On introduit la fonction h définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x)$$

- (a) Prouver que la fonction h est constante sur \mathbb{R}_+ .
 (b) En utilisant le fait que la fonction $\varphi - \psi$ appartient à E , montrer que $\varphi = \psi$.

Nous avons ainsi établi qu'il existe au plus une solution dans E à l'équation (\mathcal{D}_f) lorsque $f \in E$.

2. Pour tout réel positif x , justifier la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$.

3. Etablir que la fonction $k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_f(x) - k_f'(x) = f(x).$$

4. On suppose uniquement dans cette question que f est à valeurs dans \mathbb{R}_+ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq 0.$$

- (a) Vérifier les relations suivantes :

$$(\alpha) : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt,$$

$$(\beta) : \forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx$$

- (b) Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} k_f(x) dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x)) f(x) dx.$$

Tournez la page s.v.p.

5. On revient au cas général où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ prend des valeurs non nécessairement positives.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$ converge.

6. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f avec f continue sur \mathbb{R}_+ et f nulle sur \mathbb{R}_- .

Justifier qu'il n'existe aucune densité g dérivable sur \mathbb{R}^* , nulle sur \mathbb{R}_- et vérifiant $g - g' = f$ sur \mathbb{R}_+ .

PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$.

A la partie II, on a établi que si f appartient à E , il existe une unique fonction

$$k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$$

appartenant à E telle que :

$$k_f - k'_f = f.$$

On considère alors l'application φ définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = k_f.$$

1. Etablir que φ est un endomorphisme de E .

Définition : On dit que le réel λ est valeur propre de φ s'il existe une fonction f de E non identiquement nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$. On dit que f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ et on appelle sous-espace propre de φ associé à λ l'espace vectoriel

$$E_\lambda(\varphi) = \{f \in E \text{ telle que } \varphi(f) = \lambda f\}$$

La suite de cette partie est consacrée à la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de φ .

2. Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_a(x) = \exp(-ax).$$

Vérifier que f_a appartient à E , que f_a est un vecteur propre de φ et préciser la valeur propre associée.

3. Soit λ une valeur propre de φ et $f \in E$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ .
- (a) Montrer que λ est nécessairement non nul.
 - (b) Etablir que f est dérivable et vérifie l'équation différentielle : $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$.
 - (c) Pour tout réel positif x , donner l'expression de $f(x)$ en fonction de λ , x et d'une certaine constante.
 - (d) Montrer que $\lambda \in]0, 1[$.
4. Préciser l'ensemble $\text{Sp}(\varphi)$ des valeurs propres de φ et, pour chaque valeur propre λ de φ , proposer une base de l'espace propre $E_\lambda(\varphi)$.

