

## EXERCICE 1.

Soient  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

1. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Justifier que l'intégrale  $I_a$  converge et donner sa valeur.

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Justifier que l'intégrale  $f(x)$  converge.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale  $g(x)$  converge.

2. Etablir que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$  puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+$  tels que  $x < y$ . Etablir que :  $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$ .

4. Montrer que  $f$  réalise une bijection continue strictement décroissante de  $\mathbb{R}_+$  sur  $]0, 1]$ .

5. Prouver que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$ . On note  $\alpha$  cette solution. Justifier que  $\alpha \in ]0, 1]$ .

6. On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ .

(a) Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ . En déduire la limite de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

(b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel  $x$  donné renvoie le réel  $f(x)$ .

A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel  $\varepsilon > 0$  fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier  $N$  tel que  $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$  et renvoie la valeur de  $u_N$  correspondante.

7. Soient  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x + h \in \mathbb{R}_+^*$ . Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction  $T$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, T(x) = xf(x)$ .  
Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, T'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, T(x) = \ln(1+x).$$

## EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note :

- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels ;
- $I_n$  la matrice identité de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  et  $0_n$  la matrice nulle de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

Une matrice  $W \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  est dite nilpotente s'il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $W^q = 0_n$ .

On admettra que si  $U, V$  sont deux matrices de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  qui commutent alors :

- $U^k$  et  $V^q$  commutent pour tous entiers  $k$  et  $q$  ;
- $U^{-1}$  commute avec  $V$  lorsque  $U$  est inversible.

### 1. Deux résultats préliminaires.

- (a) Soit  $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $U^q = 0_n$ .

Prouver que  $I_n - U$  est inversible et que  $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$ .

- (b) Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A(A - I_n) = 0_n$ . On désigne par  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Vérifier que  $x - f(x) \in \ker(f)$  et  $f(x) \in \ker(f - \text{Id})$  puis établir que  $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \text{Id})$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

### 2. Etude d'une suite de matrices. Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$

On introduit la suite  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$B_0 = B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, B_{k+1} = (B_k)^2 (2B_k - I_n)^{-1}.$$

On considère pour tout entier  $k \geq 0$  la proposition

$(\mathcal{H}_k)$  : «  $2B_k - I_n$  est inversible, il existe  $C_k, D_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  tels que  $B_k - B = [B(B - I_n)] C_k$ , et  $B_k(B_k - I_n) = [B(B - I_n)]^{2^k} D_k$  avec  $B_k B = B B_k$ ,  $C_k B = B C_k$  et  $D_k B = B D_k$  »

- (a) Justifier que  $I_n - (2B - I_n)^2$  est nilpotente et que  $2B - I_n$  est inversible.  
En déduire que la propriété  $(\mathcal{H}_0)$  est vraie.
- (b) On suppose la propriété  $(\mathcal{H}_k)$  vraie pour un entier  $k \geq 0$ . Montrer que :

$$\begin{aligned} 2B_{k+1} - I_n &= [I_n + 2B_k(B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1} - B &= [(B_k - B)^2 - (B^2 - B)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1}(B_{k+1} - I) &= [B_k(B_k - I_n)(2B_k - I)^{-1}]^2 \end{aligned}$$

En déduire que la propriété  $(\mathcal{H}_{k+1})$  est vraie.

- (c) Prouver l'existence d'un entier  $p$  tel que :  $B_p(B_p - I_n) = 0_n$ .

Etablir que la matrice  $B_p$  est diagonalisable, que la matrice  $B - B_p$  est nilpotente et que :  $\forall k \geq p, B_{k+1} = B_k$ .

## PROBLEME.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de  $Z_k$  ainsi qu'à calculer la somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$  sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de  $Z_k$  ainsi que l'étude de la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = r)$ .

### Partie I : Etude de deux endomorphismes.

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ . Pour tout entier  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on désigne par  $e_k$  le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :

$$e_k = X^k$$

Rappelons que  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on définit les fonctions  $f(P)$  et  $g(P)$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt \quad \text{et} \quad f(P)(1) = P(1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que  $g$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Calculer  $f(g(P))$  puis justifier que  $\ker(g) = \{0\}$ .
3. Démontrer que  $g$  est un isomorphisme, que  $g^{-1} = f$  et que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
4. Ecrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  ainsi que la matrice  $B$  de  $g$  dans cette même base.
5. Montrer que  $f$  et  $g$  sont diagonalisables.

## Partie II : Etude d'une suite de variables aléatoires.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de  $n+1$  urnes notées  $U_0, U_1, \dots, U_n$  et on suppose que  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ , l'urne  $U_i$  contient  $i+1$  boules numérotées  $0, 1, \dots, i$ . On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne  $U_n$ . Si la boule porte le numéro  $r$  alors on repose la boule dans l'urne  $U_n$  puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne  $U_r$ .
- Plus généralement, pour tout entier  $k$  non nul, si la boule numéro  $s$  a été piochée au  $k$ -ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le  $(k+1)$ -ième tirage dans l'urne  $U_s$ .

Pour tout entier naturel  $k$ , on note :

- $Z_k$  est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au  $k$ -ième tirage. **On convient que  $Z_0 = n$ .**
  - $F_k$  est le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \sum_{r=0}^n P(Z_k = r) x^r$ .
  - $E(Z_k)$  l'espérance de la variable  $Z_k$ .
1. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^n \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

2. Etablir les deux formules suivantes valables pour tous entiers  $k \in \mathbb{N}$  et  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : (n+1) P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : (r+1) P(Z_{k+1} = r) - (r+1) P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

3. On admet dans cette question que la série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = r)$  converge pour tout

$$r \in \{1, \dots, n\} \text{ et on pose } S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r).$$

En sommant les relations  $(\mathcal{R}_1)$  sur tous les entiers  $k \in \mathbb{N}$ , donner la valeur de  $S_n$ .

En sommant les relations  $(\mathcal{R}_2)$  sur tous les entiers  $k \in \mathbb{N}$ , donner la valeur de  $S_{n-1}$  et montrer que la suite  $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$  est constante.

4. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Etablir que  $F'_k(1) = E(Z_k)$  et  $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$ .  
 (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation  $(\mathcal{S})$ , donner la relation de récurrence vérifiée par la suite  $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$  ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite  $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ .  
 (c) Donner la valeur de  $F'_k(1)$  et de  $F''_k(1)$  en fonction de  $k$  et  $n$ . Expliciter alors la variance  $V(Z_k)$  de  $Z_k$  en fonction de  $k$  et  $n$ .

### Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question II.4 la relation  $(\mathcal{S})$  est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  on désigne par  $u_k$  le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  définie par :

$$u_k = (X-1)^k.$$

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{r=0}^n P(Z_k = r) e_r = F_k = f^k(e_n)$ .
2. Prouver que  $(u_0, u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
3. Calculer  $f(u_r)$  pour  $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Retrouver ainsi que  $f$  est diagonalisable.
4. Justifier que :  $e_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u_r$  et que :  $\forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad u_r = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$ .
5. Démontrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r$ .

6. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

(a) Soit  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Déterminer un réel  $M_{j,n}$  tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$  converge lorsque  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

(b) Déterminer un réel  $C_n$  tel que :  $\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}$ .

La série  $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$  est-elle convergente ?

