

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2001

## MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

### Problème 1

On note  $I = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .

Le but du problème est la construction d'une application  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ , continue et telle que:

$$\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt$$

On considère les applications  $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , définies par  $f_0 = 1$  (application constante égale à 1) et:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt$$

1.

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est une application polynomiale.

(b) Vérifier que, pour tout  $x \in I$ ,  $f_1(x) = 1 + x$  et  $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$ , et calculer  $f_3(x)$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ , la fonction continue  $|f_n - f_{n-1}|$  admet une borne supérieure sur  $I$ .

On note  $D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$ .

(a) Calculer  $D_1$  et  $D_2$ .

(b) Montrer:  $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in I, |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n$ .

On pourra étudier séparément les cas  $x \in [0; \frac{1}{2}]$  et  $x \in [-\frac{1}{2}; 0]$ .

(c) En déduire:  $\forall n \in \mathbb{N}^\times, D_n \leq \frac{1}{2^n}$ .

(d) Établir la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} D_n$ .

En déduire que, pour tout  $x$  fixé dans  $I$ , la série  $\sum_{n \geq 1} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$  converge.

3. Établir que, pour tout  $x$  fixé dans  $I$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

On définit ainsi une application  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  par:  $\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

4. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ .

(a) Montrer:  $\forall n \in \mathbb{N}^\times, M_n \leq 1 + \frac{1}{2}M_{n-1}$ .

(b) Montrer:  $\forall n \in \mathbb{N}, M_n \leq 2$ .

(c) Établir:  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in I^2, |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|$ .

5.

(a) Établir:  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$ .

(b) En déduire que  $f$  est continue sur  $I$ .

6.

(a) Établir:  $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall p \in \mathbb{N}^\times, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$ .

(b) En déduire:  $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^\times, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ .

7. En déduire:  $\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt$ .

## Problème 2

### Rappel:

Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation  $z^n = 1$ , d'inconnue  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ , admet exactement  $n$  racines complexes distinctes qui sont

$$1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{2\pi}{n}$$

### Définitions:

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

- On note  $id_E$  l'application identique de  $E$ .
- Pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ , on note  $f^0 = id_E$ , et pour tout entier naturel  $k$ ,  $f_{k+1} = f_k \circ f$ .
- Soit  $p \in \mathbb{N}^\times$ . On dit qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  est cyclique d'ordre  $p$  s'il existe un élément  $x_0$  de  $E$  vérifiant les trois conditions suivantes
 
$$\begin{cases} * & f^p(x_0) = x_0, \\ * & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est génératrice de } E, \\ * & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts.} \end{cases}$$

La famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est alors appelée un cycle de  $f$ .

### Etude d'un exemple

Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension 3, et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice associée dans la base  $\mathcal{B}$  est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que  $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$  est une base de  $E$  et déterminer la matrice associée à  $f$  relativement à cette base.
2. Montrer que  $f$  est cyclique d'ordre 4 et que  $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$  est un cycle de  $f$ .
3. Montrer que  $f^4 = id_E$ .
4. Montrer que  $f$  est diagonalisable en déterminant une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

## Cas général

Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $n$ , et on considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  cyclique d'ordre  $p$ .

Soit  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  un cycle de  $f$ .

1. Montrer :  $p \geq n$ .
2. Montrer que  $f^p = id_E$ . En déduire que  $f$  est bijective.
3. On note  $m$  le plus grand des entiers naturels  $k$  tels que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$  est libre.
  - (a) Montrer que  $f_m(x_0)$  est combinaison linéaire des  $m$  vecteurs  $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$
  - (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à  $m$ , le vecteur  $f^k(x_0)$  est combinaison linéaire des  $m$  vecteurs  $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$
  - (c) En déduire que  $m = n$  et que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ .

4. On note  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  les  $n$  nombres complexes tels que:

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

- (a) On considère l'endomorphisme  $g$  de  $E$  défini par  $g = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$ .  
Montrer:  $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$ .  
En déduire:  $f^n = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$ .
  - (b) Déterminer la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  à l'aide des coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ .
  - (c) Montrer:  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{rg}(f - \lambda id_E) \geq n - 1$ .  
En déduire que les sous-espaces propres de  $f$  sont de dimension 1.
5. On suppose dans cette question que  $f$  est cyclique d'ordre  $n$  ( et  $\dim(E) = n$ ). Soit  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  un cycle de  $f$ .
    - (a) Montrer que si un nombre complexe  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , alors  $\lambda^n = 1$ .
    - (b) Déterminer la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ .
    - (c) Montrer que  $f$  est diagonalisable en déterminant une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .