MATHÉMATIQUES EDHEC 2003

OPTION ÉCONOMIQUE

Exercice
On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

   b) En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$.

   b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

   c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Montrer que f_n est une densité de probabilité.

2. On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n. On dit alors que X_n suit une loi monôme d'ordre n.

   a) Reconnaître la loi de X_1.

   b) Dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n, ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

3. On considère deux variables aléatoires U_n et V_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leqslant x \cap V_n \leqslant x) = P(U_n \leqslant x)\,P(V_n \leqslant x)$$

   On pose $M_n = \sup(U_n, V_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Pour tout réel x, écrire, en justifiant la réponse, l'événement $(M_n \leqslant x)$ à l'aide des événements $(U_n \leqslant x)$ et $(V_n \leqslant x)$.

b) En déduire une densité de M_n. Vérifier que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.

c) On pose $T_n = \inf(U_n, V_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de U_n et V_n, puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

Exercice

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

4. a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

   b) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.

5. a) Etudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\, e^x - e^x + 1$

   b) En déduire le signe de (x), puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

   On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.

7. a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.

   b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

8. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

9. Écrire un programme en `Pascal` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

PROBLÈME

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

   a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.

   b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

   c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2. a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

   b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P. Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4, puis en déduire que $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de M.

   c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.

   b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.

   c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

   d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

   a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

   b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

b) Déterminer $P(S_n = n)$.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n.