BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

293

ESC__MATE

EPREUVE ESC

Conception : E.S.C. CHAMBERY

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

Mardi 12 mai 2009, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les matrices A , B , D , P , E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} ; \; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; \; E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer les valeurs propres de la matrice A ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres .

   (b) En déduire que P est inversible et justifier la relation $A = P D P^{-1}$.

   (c) Calculer la matrice P^{-1} par méthode du pivot . Vérifier que $P^{-1}BP = E$.

2. Soit Φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\Phi(M) = AM - MB$.

   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) On définit l'ensemble $K = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB \}$.
   Justifier que K est le noyau de Φ .

   (c) Montrer que : $M \in K \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E$.

   (d) Montrer que l'équation $DX = XE$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

   a pour ensemble solution l'espace vectoriel $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

   (e) En déduire que $K = Vect(A)$.

   (f) Citer le théorème du rang pour l'application Φ.
   Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(\Phi)$?

EXERCICE 2

1. (a) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^4 - 4x + 1$.
   (On précisera les limites aux bornes).

   (b) En déduire que l'équation (E) : $x^4 - 4x + 1 = 0$ d'inconnue le réel x , admet exactement deux solutions réelles α et β (en notant α la plus petite) .

   (c) Justifier que $\alpha \in [\,0\,;1\,[$ et $\beta > 1$.

2. On considère la fonction g définie sur $[\,0\,;1\,]$ par : $g(x) = \dfrac{x^4 + 1}{4}$.

   On définit alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation , valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^4 + 1}{4}$.

(a) Etudier les variations de g (On précisera les valeurs aux bornes).

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

(c) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ puis justifier que la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ converge vers α .

(d) Ecrire un programme en Pascal qui demande un entier n puis qui calcule et affiche la valeur de u_n.

3. Soit la fonction de deux variables $f : \left]0,1\right[\times \left]0,1\right[\to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 4xy - 4xy^2 .$$

(a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

(b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\alpha, \frac{1}{2})$, où α désigne le réel déterminé en question 1. (b) .

(c) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

(d) Montrer que f présente un maximum local au point $A = (\alpha, \frac{1}{2})$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul . On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in \left]0;1\right[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n .
Pour tout $k \in \{0,...n\}$, l'urne $n°k$ contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu .
(Par exemple si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers , on pioche dans l'urne n°4).

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
Donner l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

(b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.

2. (a) Calculer $P_{X=0}(Y = 0)$ et $P_{X=n}(Y = 0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

(b) Justifier que pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $P_{X=k}(Y = 1) = \frac{k}{n}$.

(c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{0\leq k\leq n}$, que :

$$P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}.$$

(d) Déterminer la loi de Y et son espérance.

3. (a) Montrer que $E(XY) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}$.

(b) En déduire la covariance du couple (X, Y) .

EXERCICE 4

Soit θ un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = e^{\theta - x} & \text{si} \quad x \geq \theta \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x < \theta \end{cases}$.

1. (a) Vérifier que pour tout réel $A \geq \theta$, $\int_\theta^A f(x)dx = 1 - e^{\theta - A}$.

   (b) Montrer que f est une densité.

On note X une variable aléatoire réelle de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. On considère la variable aléatoire $Y = X - \theta$.

   (a) Montrer que la fonction de répartition F_Y de Y est définie par :

   $$\begin{cases} F_Y(y) = 1 - e^{-y} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ F_Y(y) = 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}.$$

   (b) En déduire que Y est une variable à densité qui suit une loi classique dont on précisera le paramètre. Préciser son espérance et sa variance.

   (c) En déduire l'espérance et la variance de X.

4. Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X.

   On cherche à estimer le réel θ à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - 1)$.

   (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de θ.

   (b) Calculer son risque quadratique noté $r(S_n)$.