

# E.S.C.P Eco III 2000 Maths 3

## Exercice 1

Dans tout l'exercice,  $\alpha$  désigne un paramètre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2 - \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

et on note  $\phi_\alpha$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par  $A_\alpha$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. a) Montrer que, quelque soit  $\alpha$ , l'endomorphisme  $\phi_\alpha$  admet la valeur propre 1.  
b) On note  $E_1(\alpha)$  le sous espace propre de  $\phi_\alpha$  associé à la valeur propre 1.  
Déterminer, suivant les valeurs de  $\alpha$ , une base de  $E_1(\alpha)$ .

2. On considère les vecteurs

$$f_1 = (1, 1, -1) \quad \text{et} \quad f_2 = (1, 1, -2)$$

et on note  $F_1$  le sous espace de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $f_1$  et  $f_2$ .

- a) Montrer que  $(f_1, f_2)$  est une base de  $F_1$ .
  - b) Montrer que l'image par  $\phi_\alpha$  de tout vecteur de  $F_1$  appartient à  $F_1$ .
  - c) Soit  $\widehat{\phi}_\alpha$  l'endomorphisme de  $F_1$  induit par  $\phi_\alpha$ , c'est à dire vérifiant, pour tout vecteur  $V$  de  $F_1$ ,  $\widehat{\phi}_\alpha(V) = \phi_\alpha(V)$ .  
Donner la matrice de  $\widehat{\phi}_\alpha$  dans la base  $(f_1, f_2)$  de  $F_1$ .
3. Montrer que, pour tout réel  $\alpha$ , l'endomorphisme  $\phi_\alpha$  admet la valeur propre  $\alpha - 1$  et que l'on peut trouver un vecteur  $f_3$  de  $\mathbb{R}^3$  ne dépendant pas de  $\alpha$ , qui soit, pour tout réel  $\alpha$ , vecteur propre de  $\phi_\alpha$  associé à la valeur propre  $\alpha - 1$ .
  4. a) Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Donner la matrice de  $\phi_\alpha$  dans cette base.  
b) Pour quelles valeurs du paramètre  $\alpha$  l'endomorphisme  $\phi_\alpha$  est-il diagonalisable ?

## Exercice 2

### I. Etude d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire

Etant donné un paramètre réel  $\alpha > 0$ , on note  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel des suites  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  de réels qui vérifient, pour tout  $n$  positif, la relation

$$u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$

1. Montrer que l'on peut trouver deux réels  $r$  et  $s$ , avec  $r < s$ , tels que les suites  $R = (r_n)_{n \geq 0}$  et  $S = (s_n)_{n \geq 0}$  forment une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$ . Exprimer  $r$  et  $s$  en fonction de  $\alpha$  et comparer  $|r|$  et  $|s|$ .
2. Etant donné un élément  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathcal{E}$  s'écrivant  $U = aR + bS$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , donner l'expression de  $a$  et  $b$  en fonction de  $u_0$  et  $u_1$ .
3. On suppose, dans cette question, que l'on a  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .  
Soit  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  un élément de  $\mathcal{E}$ .  
a) Montrer que la suite  $U$  converge vers 0.

- b) Si  $u_1 - u_0r$  n'est pas nul, montrer qu'il existe un indice  $n_0$  tel que, pour  $n > n_0$ ,  $u_n$  ne s'annule pas et garde un signe constant et que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln s$$

- c) Montrer que si, au contraire,  $u_1 - u_0r$  est nul et si la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'est pas identiquement nulle, alors, pour tout entier  $n$  positif,  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont de signes contraires. Quel équivalent peut-on donner, dans ce cas, de  $\ln |u_n|$  ?

4. On suppose, dans cette question, que l'on a  $\frac{1}{2} < \alpha$ .

A quelle condition sur  $u_0$  et  $u_1$  l'élément  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathcal{E}$  est-il une suite bornée ? Montrer que les éléments de  $\mathcal{E}$  qui sont des suites bornées forment un sous espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  dont on précisera la dimension.

## II. Etude d'une récurrence non linéaire

Soit  $\beta$  un réel strictement positif. On note  $m = \min(1, \beta)$  le plus petit des nombres 1 et  $\beta$  et  $M = \max(1, \beta)$  le plus grand de ces deux nombres.

On considère la suite  $V = (v_n)_{n \geq 0}$  vérifiant  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = \beta$  et, pour tout  $n$  positif, la relation

$$v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$$

1. Montrer, pour tout  $n$  strictement positif, l'inégalité  $m \leq v_n \leq 4M$ .
2. Montrer que si la suite  $V$  admet une limite, cette limite est nécessairement égale à 4.

On se propose de montrer que, pour tout  $\beta$  strictement positif, la suite  $V$  admet effectivement pour limite 4.

3. Montrer, pour tout  $n$  positif, l'inégalité

$$|v_{n+2} - 4| \leq \frac{|v_{n+1} - 4|}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{|v_n - 4|}{\sqrt{v_n} + 2}$$

4. On pose  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{m} + 2}$  et on considère la suite  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  vérifiant la relation de récurrence linéaire  $u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$  et les conditions initiales  $u_0 = |v_1 - 4|$  et  $u_1 = |v_2 - 4|$ . Montrer que, pour tout  $n$  strictement positif,  $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$ .
5. En conclusion, montrer à l'aide des résultats de la première partie que la suite  $V$  converge vers 4.
6. Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui lise un entier  $N$  et un réel  $\beta$  et qui affiche, en sortie, les  $N$  premiers termes de la suite  $V$ .

## Exercice 3

Sachant qu'un appareil a fonctionné correctement pendant un certaine durée  $x$ , on s'intéresse à la probabilité qu'il continue à bien fonctionner pendant encore au moins une durée  $y$ . Pour cela on convient de représenter la durée de vie de ce type d'appareil par une variable aléatoire réelle  $X$  définie sur un espace probabilisé dont on notera la probabilité  $\mathbf{P}$ . L'exercice a pour objet l'étude de quelques fonctions liées à cette durée de vie.

**I. On suppose d'abord que  $X$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $P(X = n)$  n'est pas nul.**

On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

$$p_n = \mathbf{P}(X = n), \quad G_n = \mathbf{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{p_n}{G_n}$$

1. Justifier les inégalités  $0 < p_n < G_n \leq 1$  et  $0 < Z_n < 1$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel. Etablir l'égalité  $\mathbf{P}(X \geq n + 1 / X \geq n) = 1 - Z_n$ .
3.
  - a) Montrer que la suite  $(\mathbf{P}(X \geq n + 1 / X \geq n))_{n \geq 0}$  est constante si et seulement si la suite  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est constante.
  - b) Vérifier que les conditions précédentes sont réalisées dans le cas où la loi de  $X$  est une loi géométrique.
  - c) Réciproquement, on suppose qu'il existe une constante  $p$  appartenant à  $]0, 1[$  telle que la suite  $(Z_n)_{n \geq 0}$  soit la suite constante égale à  $p$ . Montrer par récurrence que  $X$  suit une loi géométrique.
4. Montrer que si, pour tout entier  $m$  de  $\mathbb{N}^*$ , la suite  $\left(\frac{p_{n+m}}{p_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, alors la suite  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est croissante et la suite  $(\mathbf{P}(X \geq n + 1 / X \geq n))_{n \geq 0}$  est décroissante. (On dit alors qu'il y a vieillissement de l'appareil dont  $X$  est la durée de vie.)

**II. On suppose maintenant que la variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$  et admet une densité  $f$  continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .**

On pose, pour tout réel strictement positif  $x$ ,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt \quad \text{et} \quad Z(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$$

1.
  - a) Si  $x$  et  $y$  sont des réels strictement positifs, on pose  $H(x, y) = \frac{G(x+y)}{G(x)}$ . Montrer que l'on a alors, pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ , l'égalité :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{G(x+y)}{G(x)}(Z(x) - Z(x+y))$$

- b) Montrer que la fonction  $x \mapsto Z(x)$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  si et seulement si, pour tout réel  $y$  strictement positif fixé, la fonction  $x \mapsto \mathbf{P}(X \geq x + y / X \geq x)$  est une fonction décroissante.
2.
  - a) Montrer que si la loi de  $X$  est une loi exponentielle, alors la fonction  $Z$  est constante.
  - b) Réciproquement, montrer que si  $Z$  est la fonction constante égale au réel strictement positif  $\lambda$ , alors la fonction  $x \mapsto e^{\lambda x} G(x)$  est constante. Quelle est alors la loi de  $X$  ?