



**ECRICOME**

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 0693

## CONCOURS D'ADMISSION 2000

Option économique

# MATHÉMATIQUES

Lundi 22 mai 2000 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**

**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 4 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

### Exercice 1

Soit  $X$  une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé. On note  $f$  une densité de  $X$ ,  $F$  sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes :

- i) Si  $t$  appartient à  $]-\infty, 0[$ ,  $f(t) = 0$ .
- ii) Si  $t$  appartient à  $[0, +\infty[$ ,  $f(t)$  est positif ou nul.
- iii)  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

1) Montrer que l'équation  $F(x) = \frac{1}{2}$  admet une solution unique sur  $]0, +\infty[$ .

Cet unique réel, que l'on notera  $m$ , sera appelé **médiane** de  $X$ .

2) Dans cette question, on suppose que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Montrer que  $X$  satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de  $X$ .

3) On suppose dans cette question que la densité de  $X$  est donnée sur  $[0, +\infty[$  par  $f(t) = t e^{-t}$  et sur  $]-\infty, 0[$  par  $f(t) = 0$ .

a) Vérifier que  $f$  satisfait aux hypothèses du début de l'exercice.

b) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane  $m$  de  $X$  vérifie  $1 \leq m \leq 2$ . (On donne  $6 < e^2 < 9$ ).

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de  $m$ . On introduit pour cela la fonction  $g$  définie sur  $[1, 2]$  par  $g(x) = \ln(2x + 2)$ , fonction qui va permettre de construire une suite convergente vers  $m$ .

d) Montrer que  $g(m) = m$ .

e) Montrer que si  $x$  appartient à  $[1, 2]$  alors  $g(x)$  appartient à  $[1, 2]$  et  $|g(x) - m| \leq \frac{1}{2} |x - m|$ .

f) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour  $n > 0$  par  $u_n = g(u_{n-1})$ .

Montrer que  $|u_n - m| \leq (1/2)^n$ .

g) Déterminer un entier  $n$  tel que  $u_n$  soit une valeur approchée de  $m$  à  $10^{-2}$  près.

4) On revient maintenant au cas général et on suppose que la variable  $X$  admet une espérance  $E(X)$  et une variance  $V(X)$ . On note toujours  $m$  la médiane de  $X$ .

a) Montrer qu'on a les inégalités :

$$V(X) \geq \int_0^m (t - E(X))^2 \cdot f(t) dt \quad \text{et} \quad V(X) \geq \int_m^{+\infty} (t - E(X))^2 \cdot f(t) dt.$$

b) En distinguant les cas  $m \leq E(X)$  et  $m > E(X)$  montrer que :  $|m - E(X)| \leq \sqrt{2 \cdot V(X)}$ .

### Exercice 2

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme f(P) défini par :

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X).$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
- 2) On note B la base usuelle de E constituée, dans cet ordre, des quatre polynômes 1, X, X<sup>2</sup>, X<sup>3</sup>.

Montrer que la matrice de f dans la base B est

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 3) Montrer que f est bijectif.
- 4) Calculer la matrice de f<sup>-1</sup> dans la base B.
- 5) Soit P un élément de E défini par : P(X) = a<sub>0</sub> + a<sub>1</sub>X + a<sub>2</sub>X<sup>2</sup> + a<sub>3</sub>X<sup>3</sup>.

a) Expliciter en fonction des réels a<sub>0</sub>, a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub> le polynôme Q = f<sup>-1</sup>(P).

b) On considère pour tout entier strictement positif n, la somme  $S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \cdot P(k)$ .

Exprimer simplement S(n) en fonction de (-1)<sup>n</sup>, Q(n+1) et Q(1).

c) Expliciter alors la valeur de S(n) en fonction de n, a<sub>0</sub>, a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>.

### Exercice 3

T est l'ensemble des couples  $(x, y)$  de réels solutions du système d'inéquations  $x \geq \frac{1}{4}$   $y \geq \frac{1}{4}$   $x + y \leq \frac{3}{4}$ .

On note T' "l'intérieur" de T, à savoir l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4} .$$

Soit f la fonction définie sur T par :  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}$ .

- 1) Représenter sur un même graphique T et T'.
- 2) On admet que T' est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
  - a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
  - b) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.
- 3) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple  $(x, y)$  de T :

$$2 \leq f(x, y) \leq \frac{16}{3} .$$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u). On suppose que  $p \geq \frac{1}{4}$   $r \geq \frac{1}{4}$   $u \geq \frac{1}{4}$  et que  $p + r + u = 1$ .

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note  $B_n$  (respectivement  $R_n, V_n$ ) l'événement :

" Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au n-ième tirage. "

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche (resp rouge).

On définit alors la variable  $D = |X - Y|$  égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

- 4) Déterminer la loi et l'espérance de X. Faire de même pour Y.
- 5) Soient i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas  $i = j$ ,  $i < j$  et  $i > j$ , exprimer l'événement  $(X = i) \cap (Y = j)$  à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple  $(X, Y)$ .
- 6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 7) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité :  $P(D=k) = \frac{p \cdot r}{p+r} [(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}]$ .
- 8) Montrer que D admet une espérance et que  $E(D) = f(p, r)$ . Encadrer alors  $E(D)$ .

**FIN DE L'ÉPREUVE.**