ecricome

banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles
escbordeaux/escmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

J. 1699

CONCOURS D'ADMISSION 2002

option économique

MATHÉMATIQUES

mercredi 22 mai 2002 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

1. EXERCICE

Dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a,b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1.1. Structure de E.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E, ainsi que sa dimension.

1.2. Etude d'un cas particulier.

On pose $A = M(1,0)$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est une matrice inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f_{1,0}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3. Diagonalisation des éléments de E et application.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\overrightarrow{u} = (1,1,1), \ \overrightarrow{v} = (1,-1,0), \ \overrightarrow{w} = (1,1,-2)$$

1. Justifier que les matrices de l'ensemble E sont diagonalisables.

2. Montrer que $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Ecrire P.

4. Déterminer P^{-1}.

5. Exprimer les vecteurs $f_{a,b}(\overrightarrow{u})$, $f_{a,b}(\overrightarrow{v})$, $f_{a,b}(\overrightarrow{w})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

6. En déduire l'expression de la matrice $D_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$.

7. Justifier l'égalité :
$$P^{-1}M_{a,b}P = D_{a,b}$$

8. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $D_{a,b}$ soit inversible.

9. Cette condition étant réalisée, déterminer la matrice inverse de $D_{a,b}$.

10. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M_{a,b}$ soit inversible.

2. EXERCICE.

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

2.1. Etude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

1. Etudier le sens de variation des fonctions h_n.

2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.

3. Etude du cas particulier $n = 1$.

   a. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1, +\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.

   b. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1, +\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

   a. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

   b. En déduire les variations de f_n sur $]-1, +\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

2.2. Etude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

2.2.1. Calcul de U_1.

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{1+x}$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx.$$

3. Montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$.

2.2.2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (on ne demande pas sa limite).

3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}$$

4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.2.3. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

1. Montrer que :
$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

2. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :
$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} \left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}) \right]$$

3. EXERCICE.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

3.1. Etude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k \text{ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ième}}\text{tirage.} \\ Y = 0 \text{ si les n boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

2. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

Tournez la page S.V.P.

3. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1.$$

4. Pour $x \neq 1$ et n entier non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

5. En déduire $E(Y)$.

3.2. Etude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 \text{ si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n-1$.

   a. Déterminer $P(X_{p+1} = 1/Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

   b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

   $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$$

   c. En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables $X_1, X_2, \ldots, X_p$ étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(\ Z_p)$).