ecricome

www.ecricome.org

CONCOURS D'ADMISSION 2007

2

Mathématiques

Option Economique

Mercredi 18 avril 2007 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

1. EXERCICE.

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1.1. Etude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.
4. En déduire que :

$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geqslant a$$

1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$..

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?
2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
   Démontrer que :

$$\forall t > a \qquad 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier n, non nul :

$$u_n \geqslant a$$

4. Prouver alors que pour tout entier n non nul :

$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.
6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.
3. Vérifier que :

$$g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. EXERCICE.

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
La matrice A suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

2.1. Diagonalisation de A.

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.

2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :
$$A = PDP^{-1}$$
Donner l'écriture matricielle de P^{-1}.

2.2. Diagonalisation de ϕ_A.

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A. En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A.

3. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :
$$DN - ND = \lambda N$$

4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a. Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.

   b. En déduire que la famille (A,M_1) avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre $Ker\phi_A$ associé à la valeur propre 0.

   c. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.

   d. En déduire une base de chaque sous-espace propre E_{λ_1} et E_{λ_1}associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

5. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?

3. EXERCICE.

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

3.1. Mode de paiement de la clientèle.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} P[S=0 \cap U=0] &= 0.4 \\ P[S=0 \cap U=1] &= 0.3 \\ P[S=1 \cap U=0] &= 0.2 \\ P[S=1 \cap U=1] &= 0.1 \end{aligned}$$

   où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

   a. Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \dfrac{3}{5}$.

   b. Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?

   c. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.
   Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geqslant 2$).
   On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
   -C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
   -L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

   a. Reconnaître la loi de C_n, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

b. Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P\left[L_1 = k\right] = 1$$

c. Déterminer la loi de L_2.

3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
   Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

3. a. Démontrer que la fonction de répartition de T, notée F_T est définie par :

$$\begin{array}{ll} \forall x < 0 & F_T(x) = 0 \\ \forall x \geqslant 0 & F_T(x) = 1 - (x+1)e^{-x} \end{array}$$

   b. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités(de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\dfrac{2e-3}{2e}$.

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

   a. M désignant le temps d'attente du client C exprimer M en fonction de T_A et T_B.

b. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & P\left[M \leqslant t\right] = 1 - (1+t)^2 e^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} & P\left[M \leqslant t\right] = 0 \end{cases}$$

c. Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.