ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2009

Mathématiques

Option Économique

Jeudi 14 mai 2009 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 - 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun intrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages. (dans la version d'origine, pas celle-ci)

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

1. EXERCICE.

À tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ ou a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \{M(a,b,c) \text{ avec } a, b, c \text{ réels}\}$$

1.1. Recherche d'une base de E.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

1.2. Cas particulier de la matrice $M(1, 2, 3)$.

1. Donner les valeurs propres de $M(1, 2, 3)$.
2. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$D = P^{-1}M(1,2,3)P$$
3. Donner l'expression de P^{-1} et en déduire la matrice A^n en fonction de l'entier naturel n.

1.3. Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$.

On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer les matrices J^2, J^3. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
2. Montrer que our tout entier naturel $n \geqslant 2$:
$$[M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$
L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?
3. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1, 1, 1)]^n$.

1.4. Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 2)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $M(1, 1, 2)$. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ par :

$$\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (0,1,0),\ \overrightarrow{w} = (2,1,1).$$

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs propres de f associés à deux valeurs propres que l'on précisera.
3. Exprimer $f(\overrightarrow{v})$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
5. Montrer que la matrice de passage R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ a pour matrice inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Donner une relation reliant les matrices $M(1, 1, 2)$, Q, R et T.
7. Sans l'expliciter, écrire $[M(1, 1, 2)]^n$ en fonction de n, Q, R, T.

2. EXERCICE.

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, f(x, y) = e^{x+4y}\ln(xy)$$

2.1. Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln 2 \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$
$$\text{avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} < \beta$$
6. Proposer un programme en Pascal permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

2.2. Extrema de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x et y strictement positifs :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \dfrac{1}{x}e^{x+4y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y) + \dfrac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$
3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et établir que :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\dfrac{\alpha - 1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{4}{\alpha}e^{2\alpha} \end{cases}$$
5. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).
6. De même, la fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$?

3. EXERCICE.

3.1. Liminaire.

Soient x un réel dans l'intervalle $[0, 1[$, n un entier naturel non nul et S_n la fonction définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

1. Calculer la somme $S_n(x)$.
2. Dériver l'égalité obtenue et montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

3.2. Partie 1.

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0,8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en annexe).
4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.
   a. On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.
   Déterminer la loi de Y, donner sans calcul son espérance et sa variance.
   b. On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire, si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
   Déterminer en fonction de p la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leqslant k \leqslant 10$.
   Utiliser le liminaire pour calculer l'espérance de Z en fonction de p.
5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
   – Le premier jour, il prend le bus.
   – Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
   – Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.
   On note p_n la probabilité de l'événement A_n = « Monsieur Thurman prend le bus le jour n ».
   a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul :
   $$p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right) p_n + \frac{1}{2}.$$
   b. Soit α le réel vérifiant :
   $$\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2}.$$
   Déterminer α en fonction de p, puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - \alpha) + \alpha.$$
   c. La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

3.3. Partie 2.

1. Le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis pendant une période de durée t suit une loi de Poisson Y_t de paramètre λt, λ étant une constante strictement positive. Une origine de temps étant choisie, on note T la variable aléatoire réelle représentant le temps d'attente du premier appel vers ce standard. Par convention $P[T \leqslant t] = 0$ pour $t < 0$.
   a. Pour tout entier naturel k, rappeler la valeur de la probabilité de l'événement $[Y_t = k]$, ainsi que l'espérance et la variance de Y_t.
   b. Que peut-on dire des événements $[Y_t = 0]$ et $[T > t]$ pour $t > 0$? En déduire la probabilité des événements $[T > t]$ et $[T \leqslant t]$ pour $t > 0$.

c. Expliciter la fonction de répartition F_T de T. Réconnaître la loi de T et donner son espérance et sa variance.

2. La durée, exprimée en heures, du transport d'un client par la société est une variable aléatoire U à densité dont une densité est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = te^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ g(t) = 0 \text{ si } t < 0. \end{cases}$$

a. Vérifier que g est bien une densité de probabilité.

b. Montrer que U admet une espérance que l'on déterminera. Que représente cette espérance ?

Table

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \, \mathrm{d}t$$

Par exemple $\Phi(0,67) = 0,7468$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8437	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817