CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

# ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

**OPTION ECONOMIQUE**

# MATHEMATIQUES III

Jeudi 16 Mai 2002, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

## EXERCICE I

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue $M$, dans l'espace vectoriel $E$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ est une base de $E$, qui est donc de dimension 4.

Si $A$ et $B$ sont deux matrices de $E$, l'ensemble des matrices $M$ de $E$ vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

**1.** Soit $A$ et $B$ deux matrices de $E$ et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice $M$ de $E$, associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de $E$ et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base $(U_1, U_2, U_3, U_4)$.
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

**2.** Dans cette question, $r$ et $s$ désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $E$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $x$, $y$, $z$, $t$ pour que $M$ appartienne à $V_{D,\Delta}$.

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

**3.** Soit $a, b, c, d$ des réels non nuls vérifiant $a-b \neq c-d$, $a-b \neq 1$, $c-d \neq 1$, $A$ et $B$ les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de $A$ sont 1 et $a-b$. En déduire qu'il existe une matrice inversible $P$ de $E$, et une matrice $D$ égale à celle de la question **2.** pour une valeur convenable de $r$, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible $Q$ de $E$, et d'une matrice $\Delta$ égale à celle de la question **2.** pour une valeur convenable de $s$, telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

c) Pour toute matrice $M$ de $E$, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

**4.** Dans cette question $r$, $s$ et $u$, $v$ désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Par une méthode analogue à celle de la question **2.**, déterminer $V_{D,\Delta}$.

b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question **3.**, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où $A$ et $B$ sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

## EXERCICE II

Cet exercice met en évidence le fait que l'existence d'une espérance finie, pour une variable aléatoire, n'est pas toujours intuitive.
Dans tout l'exercice, $I$ désigne l'intervalle réel $[1, +\infty[$ et on suppose que toutes les variables aléatoires envisagées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

### A . Première approche

**1.** Montrer que l'application $g$ définie par : $\begin{cases} g(t) = \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

**2.** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $I$ admettant $g$ pour densité. Déterminer, pour tout réel $t$, la probabilité $\mathbf{P}([X \leqslant t])$ et montrer que $X$ n'admet pas d'espérance.

**3.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $I$ admettant $g$ pour densité et telles que, pour tout réel $t$, les événements $[X \leqslant t]$ et $[Y \leqslant t]$ sont indépendants. On définit alors deux variables aléatoires $U$ et $V$ par : $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega$ de $\Omega$, $U(\omega)$ est le plus petit des nombres $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, tandis que $V(\omega)$ est le plus grand de ces nombres.

a) Pour tout réel $t$, exprimer l'événement $[V \leqslant t]$ à l'aide des variables aléatoires $X$ et $Y$ ; en déduire la probabilité $\mathbf{P}([V \leqslant t])$.

b) Montrer que la variable aléatoire $V$ admet pour densité l'application $h$ définie par :

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \in I \\ h(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) De façon analogue, calculer pour tout réel $t$ la probabilité $\mathbf{P}([U > t])$ et en déduire que la variable aléatoire $U$ admet pour densité l'application $m$ définie par :

$$\begin{cases} m(t) = \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ m(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Montrer que $V$ n'admet pas d'espérance et que $U$ admet une espérance que l'on calculera.

## B . Situation plus générale

Dans cette partie, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on suppose que $n$ visiteurs, numérotés de 1 à $n$, se rendent aléatoirement dans un musée et que, pour tout entier de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, l'heure d'arrivée du visiteur numéro $k$ est une variable aléatoire $X_k$ admettant pour densité l'application $g$ définie dans la partie A..

On suppose de plus que, pour tout réel $t$, les événements $[X_1 \leqslant t]$, $[X_2 \leqslant t]$, ... , $[X_n \leqslant t]$ sont mutuellement indépendants.

Si $r$ est un entier de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, on note $T_r$ la variable aléatoire désignant l'heure d'arrivée du $r$-ième arrivant.

La partie A. traite donc du cas $n = 2$, les variables aléatoires $U$ et $V$ étant respectivement égales à $T_1$ et $T_2$.

**1.** Soit $t$ un élément de $I$ fixé. Pour tout entier $k$ de $[\![1,n]\!]$, on note $B_k$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement $[X_k \leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

a) Préciser, en la justifiant soigneusement, la loi de la variable aléatoire $Z$ définie par :

$$Z = B_1 + \ldots + B_n$$

b) Pour tout entier $r$ de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, exprimer l'événement $[T_r \leqslant t]$ à l'aide de la variable aléatoire $Z$ et en déduire l'égalité : $\mathrm{P}([T_r \leqslant t]) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}$.

**2.** a) Vérifier, pour tout entier $k$ de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, l'égalité : $kC_n^k - (n+1-k)C_n^{k-1} = 0$.

b) En déduire que, pour tout entier $r$ de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, la variable aléatoire $T_r$ admet pour densité l'application $f_r$ définie par :

$$\begin{cases} f_r(t) = \quad rC_n^r \left(\dfrac{1}{t}\right)^{n+2-r} \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^{r-1} & \text{si } t \in I \\ f_r(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Donner un équivalent à $tf_r(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$ et en déduire que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ admettent une espérance alors que $T_n$ n'en admet pas.

**3.** Pour tout couple $(p,q)$ d'entiers naturels, on pose : $J(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout couple $(p,q)$ d'entiers naturels, la relation :

$$(p+1)\, J(p, q+1) = (q+1)\, J(p+1, q)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel $q$, l'intégrale $J(0,q)$.

c) Montrer par récurrence sur $p$ que, pour tout couple d'entiers naturels $(p,q)$, on a :

$$J(p,q) = \frac{p!\, q!}{(1+p+q)!}$$

**4.** Soit $r$ un entier de l'intervalle $[\![1, n-1]\!]$.

a) Si $a$ est un réel strictement supérieur à 1, transformer en effectuant le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ l'intégrale $\int_1^a t\, f_r(t)\, dt$.

b) En déduire la valeur de l'espérance de la variable aléatoire $T_r$ en fonction de $n$ et de $r$.