

# ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

OPTION ÉCONOMIQUE

## MATHEMATIQUES III

Mercredi 7 mai 2003, de 8h à 12h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

### EXERCICE

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et  $A$  la matrice carrée d'ordre 2 définie par :  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ .
- Montrer que si  $a$  et  $b$  sont égaux, la matrice  $A$  n'est pas inversible.
  - Calculer la matrice  $A^2 - 2aA$ . En déduire que, si  $a$  et  $b$  sont distincts, la matrice  $A$  est inversible et donner la matrice  $A^{-1}$ .
  - Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont  $a + b$  et  $a - b$ .
  - On pose  $\Delta = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$ . Déterminer une matrice  $Q$ , carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant  $A = Q\Delta Q^{-1}$ .
  - Calculer la matrice  $Q^{-1}$  et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice  $A^n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .
2. Soit  $p$  un réel vérifiant  $0 < p < 1$  et  $q$  le réel  $1 - p$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre  $p$ .

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on désigne par  $M(\omega)$  la matrice carrée d'ordre 2 suivante :  $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$  et on note  $S(\omega)$  (respectivement  $D(\omega)$ ) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de  $M(\omega)$  et on définit ainsi deux variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

- Montrer que la probabilité de l'événement  $[X = Y]$  est donnée par :  $\mathbf{P}([X = Y]) = \frac{p}{2 - p}$  et en déduire la probabilité de l'événement  $\{\omega \in \Omega ; M(\omega) \text{ est inversible}\}$ .
- Calculer la covariance des variables aléatoires  $S$  et  $D$ .

- c) Calculer les probabilités  $\mathbf{P}([S = 2] \cap [D = 0])$ ,  $\mathbf{P}([S = 2])$  et  $\mathbf{P}([D = 0])$ .  
 Les variables aléatoires  $S$  et  $D$  sont-elles indépendantes?
- d) Établir, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $\mathbf{P}([S = n]) = (n - 1)p^2q^{n-2}$ .
- e) En déduire, lorsque  $p$  est égal à  $\frac{2}{21}$ , que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices  $M(\omega)$  possibles est 11.

## PROBLÈME

### Partie A : Étude d'une fonction

1. a) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur les intervalles  $] - \infty, 0[$  et  $]0, 1[$ , vérifiant pour tout réel  $x$  appartenant à  $] - \infty, 0[ \cup ]0, 1[$ , l'égalité :

$$x(1-x)f'(x) + (1-x)f(x) = 1$$

Soit  $h$  la fonction définie sur  $] - \infty, 0[ \cup ]0, 1[$ , par :  $h(x) = xf(x)$ .

Montrer que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur les intervalles  $] - \infty, 0[$ ,  $]0, 1[$  et calculer sa dérivée.

En déduire qu'il existe deux constantes réelles  $c_1$  et  $c_2$  vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in ] - \infty, 0[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_1 \\ \forall x \in ]0, 1[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_2 \end{cases}$$

- b) On définit une fonction  $f$  sur les intervalles  $] - \infty, 0[$  et  $]0, 1[$  par :

$$\begin{cases} \forall x \in ] - \infty, 0[, & f(x) = \frac{-\ln(1-x) + c_1}{x} \\ \forall x \in ]0, 1[, & f(x) = \frac{-\ln(1-x) + c_2}{x} \end{cases}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes réelles.

Déterminer les constantes  $c_1$  et  $c_2$  pour que la fonction  $f$  soit prolongeable par continuité en 0.

2. Dans toute la suite de cette partie,  $f$  désigne la fonction définie sur  $] - \infty, 1[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction  $x \mapsto \ln(1-x)$  puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction  $f$ .
- b) En déduire que la fonction  $f$  est continue en 0, dérivable en 0 et préciser la valeur de  $f'(0)$ .
- c) Montrer que, pour tout  $x$  de  $] - \infty, 0[ \cup ]0, 1[$ , on a :

$$f'(x) = \left( \frac{1}{1-x} - f(x) \right) \frac{1}{x}$$

En utilisant le développement limité de la question précédente, montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, 1[$ .

3. a) Étudier le signe de la fonction  $\varphi$  définie sur  $] - \infty, 1[$  par :  $\varphi(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$ .

En déduire les variations de la fonction  $f$

- b) Donner le tableau de variation de la fonction  $f$  et l'allure de la représentation graphique de  $f$  en précisant les asymptotes, la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de l'origine.

4. Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ .

a) Soit  $h$  la fonction définie sur  $] - \infty, 1[$  par :  $h(t) = -\ln(1-t)$ .

Calculer, pour tout réel  $t$  de  $] - \infty, 1[$ ,  $h'(t)$ ,  $h''(t)$ , puis pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $h^{(n)}(t)$ .

b) Justifier, pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt$$

c) Établir, pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0, x]$ , la double inégalité :  $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ .

En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la double inégalité :

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} \leq x^{n+1} f(x)$$

d) Justifier l'égalité :  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ .

## Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Dans cette question  $f$  est la fonction définie à la question 2. de la partie A.

a) Soit  $f_1$  la fonction définie sur  $]0, 1]$  par : 
$$\begin{cases} f_1(t) = \frac{\ln t}{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ f_1(1) = 1 \end{cases}$$

Justifier la continuité de  $f_1$  sur  $]0, 1]$  et établir, pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ , l'égalité :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 f_1(t) dt$$

b) Soit  $a$  un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ . Établir pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :

$$\int_a^1 t^n \ln t dt = -\frac{a^{n+1} \ln a}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} (1 - a^{n+1})$$

En déduire la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 t^n \ln t dt$  et l'égalité :  $\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$ .

c) Soit  $a$  un réel de l'intervalle  $]0, 1[$  et  $n$  un entier naturel, démontrer pour tout  $t$  de  $[a, 1]$ , l'égalité

$$\int_a^1 f_1(t) dt + \sum_{k=0}^n \int_a^1 t^k \ln t dt = \int_a^1 t^{n+1} f_1(t) dt$$

d) Montrer que la fonction  $t \mapsto t f_1(t)$  est prolongeable en une fonction  $h_1$  continue sur  $[0, 1]$ .

En déduire que l'intégrale  $\int_0^1 f_1(t) dt$  converge et qu'elle vérifie :

$$\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 t^n h_1(t) dt$$

e) On désigne alors par  $M$  le maximum sur  $[0, 1]$  de la fonction  $h_1$ .

Établir, pour tout entier naturel  $n$ , l'inégalité :

$$0 \leq \int_0^1 f_1(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{M}{n+1}$$

f) Justifier la convergence de la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$ , puis l'égalité :  $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

2. On donne :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  et on désigne par  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} g(t) = \frac{6}{\pi^2} f(t) & \text{si } t \in [0, 1[ \\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que  $g$  est une densité de probabilité.

b) Soit  $X$  une variable aléatoire ayant pour densité  $g$ .

Vérifier, pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ , l'égalité  $\int_0^x \ln(1-t) dt = \int_{1-x}^1 \ln t dt$ .

Utiliser alors le résultat de la question 1.b pour prouver que  $X$  possède une espérance et la calculer.

c) Par une méthode analogue, montrer que l'intégrale  $\int_0^1 (t-1) \ln(1-t) dt$  est égale à  $\frac{1}{4}$ .

En déduire que la variable aléatoire  $X^2$  admet une espérance, préciser sa valeur et calculer la variance de la variable aléatoire  $X$ .

### Partie C : Encadrement d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on désigne par  $V$  l'ensemble ouvert défini par :

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \right\}$$

1. Soit  $u$  la fonction de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  :  $(x, y) \mapsto u(x, y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{4}$ .

a) Montrer que la fonction  $u$  admet un minimum sur  $V$  dont on précisera la valeur, mais n'admet pas de maximum.

b) Montrer que la fonction  $u$  est majorée par  $\frac{7}{8}$  sur l'ouvert  $V$ .

2. Soit  $F$  la fonction :  $(x, y) \mapsto F(x, y) = \frac{\ln\left(\frac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\frac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}$ .

a) À l'aide des résultats de la partie A, montrer que  $F$  est définie sur l'ouvert  $V$  et qu'elle y admet un maximum. Préciser la valeur de ce maximum.

b) Donner un encadrement de  $F(x, y)$  pour tout  $(x, y)$  de  $V$ .