BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 289

Conception : HEC Paris

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2018, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

- On note $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$ et $0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbf{R}^n$.
- On pose : $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}$ et $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbf{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)}}$.

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

   b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

   c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang : $F_j = \mathrm{Im}(f^j)$ et $r_j = \dim(F_j)$.
   Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est-à-dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbf{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

   a) Calculer r_0 et r_n.

   b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

   (i) Déterminer le rang de g_j.

   (ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim\big(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j\big)$.

   c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H, noté $Card(H)$, est le nombre de ses éléments.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{k} i\, x_i = k$, c'est-à-dire : $P(k) = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbf{N}^k\, ;\, x_1 + 2\,x_2 + \cdots + k\,x_k = k\big\}$. On pose : $p(k) = Card\big(P(k)\big)$.

Tournez la page S.V.P.

3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_i = \mathrm{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \,;\, r_j - r_{j+1} = i\}\right)$ $\qquad (*)$

   a) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

   b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

      (i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

      (ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

      (iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ vérifiant $(*)$.

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell, k) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \,;\, x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant \ell\right\}$ et $q(\ell, k) = \mathrm{Card}\left(Q(\ell, k)\right)$.

   a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

      (i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

      (ii) Pour tout entier $\ell \geqslant k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

   b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geqslant 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k-\ell) = \mathrm{Card}\left(\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \,;\, x_1 + x_2 + \cdots + x_k = \ell\right\}\right).$$

   c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

      (i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

      (ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

5. La fonction *Scilab* suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
(1) function q=qmatrix(n)
(2)   q=ones(n,n);
(3)     for L=2 : n
(4)         for K=2 : n
(5)             if (K< L) then q(L,K)=·········;
(6)                 else  if (K==L) then q(L,K)=·········;
(7)                         else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
(8)             end;
(9)         end;
(10)    end;
(11) endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)

   1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
   1.    2.    2.    3.    3.    4.    4.    5.    5.
   1.    2.    3.    4.    5.    7.    8.    10.   12.
   1.    2.    3.    5.    6.    9.    11.   15.   18.
   1.    2.    3.    5.    7.    10.   13.   18.   23.
   1.    2.    3.    5.    7.    11.   14.   20.   26.
   1.    2.    3.    5.    7.    11.   15.   21.   28.
   1.    2.    3.    5.    7.    11.   15.   22.   29.
   1.    2.    3.    5.    7.    11.   15.   22.   30.
```

   a) Compléter les lignes (5) et (6) du script de la fonction `qmatrix`.

   b) Donner un script *Scilab* permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

   c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geqslant 1$, puis, la démontrer.

PROBLÈME

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = 1 - p$.

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2, \ \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}.$$

1.a) Dans les deux cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule :

$$V\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) = k\,p\,(1-p)\big(1 + (k-1)\,r\big).$$

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

2. On suppose dans cette question que n est égal à 2.

a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) = p\,(2p - 1)$.

b) Que vaut alors $P\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big)$?

c) En déduire que r ne peut être égal à -1 que lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ et $P\big([X_1 + X_2 = 1]\big) = 1$.

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P\Big(\Big[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\Big]\Big) = 1$.

a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

b) Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P\Big(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\Big)$ est strictement positive et la calculer.

Partie II. Lois bêta-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\,x-1}(1-t)^{\,y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{\,x-1}(1-t)^{\,y-1}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{\,y-1}(1-t)^{\,x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\,x-1}(1-t)^{\,y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall\,(x, y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$, $B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{\,x-1}(1-t)^{\,y-1}\,\mathrm{d}t$.

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1, y) = \dfrac{x}{y} \times B(x, y+1)$.

b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x, y)$.

6. Pour tout réel z, soit $\left((z)^{[m]}\right)_{m\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $(z)^{[0]} = 1$ et $\forall\, m \in \mathbf{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$.
(par exemple, pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a : $(1)^{[m]} = m!$)

Établir pour tout $(x, y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$ et pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x, y)\,.$$

7. Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $p_k = \dbinom{n}{k} \dfrac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

a) À l'aide de la relation obtenue dans la question 6, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(n\,; a, b)$ *si* $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$ *et si :*

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P([S = k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}\,.$$

b) Reconnaître la loi $\mathbf{B}(n\,; 1, 1)$.

c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\mathbf{B}(n\,; a, b)$ est égale à $\dfrac{n\,a}{a+b}$.

Partie III. Un modèle possible dans le cas où n=2

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0\,,1\}$ telles que :

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \{0\,,1\}^2,\ P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) = \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a, b)}\,.$$

8.a) Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(2\,; a, b)$.

c) Établir la relation : $P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

9. La fonction *Scilab* suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), effectue une simulation des deux variables aléatoires X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

```
(1) function x=randbetabin(a,b)
(2)   x=zeros(1,2) ;
(3)   u=(a+b)*rand() ;
(4)   v=(a+b+1)*rand() ;
(5)          if (u<a) then x(1,1)=1 ; if ········· then x(1,2)=1 ;end ;
(6)                   else if ········· then x(1,2)=1 ;end ;
(7)          end ;
(8) endfunction
```

a) Préciser la loi simulée par la variable u de la ligne (3).

b) Compléter les lignes (5) et (6).

10.a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2.

b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.

Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.

FIN