

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2001

## MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

### Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  est  $A$ .

1. Montrer que  $A$  n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de  $A$ .
2. (a) Calculer  $A^2, A^3, A^4$ .  
(b) Etablir que 0 est la seule valeur propre de  $f$ .  
(c) Déterminer la dimension du noyau de  $f$ .  
(d) Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?
3. On note  $\varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$ , et  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ .  
(a) Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .  
(b) Déterminer la matrice  $N$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^4$ .
4. Existe-t-il un automorphisme  $g$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  tel que  $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$  ?

### Exercice 2

On considère l'application  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie, pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

- (b) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0; +\infty[$ . Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , calculer  $f'(x)$ .
- (c) Montrer que  $f'(x)$  tend vers  $-\frac{1}{2}$  lorsque  $x$  tend vers 0.
- (d) En déduire que  $f$  est  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. (a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0; +\infty[$  et que:  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$
- (b) Etudier les variations de la fonction  $g : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie, pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , par:
- $$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$$
- En déduire :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \quad f''(x) > 0$ .
- (c) En déduire le sens de variation de  $f$ . On précisera la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .
3. On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 0$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ .
- (a) Montrer :
- $$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$
- (b) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ .
- (c) Montrer :
- $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$
- (d) Etablir que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 3

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_n(t) = 0$ .  
En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  est convergente.
- (b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; +\infty[, \quad \int_0^x f_n(t) dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t) dt$ .
- (c) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^x f_n(t) dt = 1$
- (d) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $f_n$  est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.
1. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la variable aléatoire  $X_n$  admettant  $f_n$  pour densité de probabilité.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'espérance  $E(X_n)$  et la variance  $V(X_n)$  vérifient:

$$E(X_n) = n + 1 \quad V(X_n) = n + 1$$

(b) Dans cette question, on suppose que  $n = 4$ . On donne les valeurs approchées à  $10^{-2}$  suivantes:

$$\int_0^4 f_4(t) dt \simeq 0,37 \quad \int_0^6 f_4(t) dt \simeq 0,71 \quad \int_0^8 f_4(t) dt \simeq 0,90$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de  $X_4$ .

Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité  $P(X_4 > 4)$  et une valeur décimale approchée de la probabilité  $P(4 < X_4 \leq 8)$ .

**3.** Pour tout réel  $t > 0$ , on définit la variable aléatoire  $Y_t$  égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant  $t$ .

On suppose que la variable aléatoire  $Y_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $t$ .

(a) Rappeler, pour tout réel  $t > 0$ , les valeurs de l'espérance et de la variance de  $Y_t$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit la variable aléatoire réelle  $Z_n$ , prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , égale à l'instant d'arrivée de la  $n^{\text{ième}}$  voiture au péage à partir de l'instant 0.

(b) Soient  $t \in ]0; +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Justifier l'égalité de l'événement  $(Z_n \leq t)$  et de l'événement  $(Y_t \geq n)$

(c) En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle  $Z_n$ .

(d) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la variable aléatoire  $Z_n$  admet  $f_{n-1}$  comme densité de probabilité.

- FIN -