Programme ESC de l'E.M.Lyon
Concours d'entrée 2003

EXERCICE 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 3 et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Première partie

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3=A^2+2A$.
2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n,b_n) de nombres réels tel que : $A^n=a_nA+b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Ecrire un programme, en Pascal, qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.
5. a. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
   $$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n.$$
   b. En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   c. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2, n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Seconde partie

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice, relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, est A.

1. Déterminer une base de Im(f) et donner la dimension de Im(f).
2. a. Est-ce que f est diagonalisable ?
   b. Est-ce que f est bijectif ?
3. Déterminer les valeurs propres de f, et donner, pour chaque sous-espace propre de f, une base de ce sous-espace propre.
4. Déterminer une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont dans l'ordre réel croissant, et une matrice inversible P dont la troisième ligne est formée de termes tous égaux à 1, telle que $A=PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.
5. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $AM+MA=0$.

Exercice 2

On note $e=\exp(1)$ et $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$.

On note, pour tout nombre réel a non nul, l'application $f_a : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*, f_a(x,y)=\frac{xe^{-x}}{y}-\frac{y}{a}.$$

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes entre elles.

Première partie

Dans cette partie, on prend $a=-e$ et on note g à la place de f_{-e}.

Ainsi, l'application g $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*, f_a(x,y)=\frac{xe^{-x}}{y}+\frac{y}{e}.$$

1. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il existe un couple unique (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, et calculer ce couple.
4. Est-ce que g admet un extremum ?

Seconde partie

Dans cette seconde partie, on prend a=1.
On considère, pour tout entier n tel que $n \geq 1$, l'application h_n : $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, h_n(x)=f_1(x,x^n)=\frac{xe^{-x}}{x^n}-x^n,$$

et l'application φ_n : $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \varphi_n(x)=e^{-x}-x^{2n-1}.$$

1. a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\forall x \in]0,+\infty[, h_n(x)=0 \Leftrightarrow \varphi_n(x)=0$
   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'équation $h_n(x)=0$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n, et que :
   $$0 < u_n < 1.$$
2. a. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\ln u_n = -\frac{u_n}{2n-1}$.
   b. En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

EXERCICE 3

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=0 \text{ si } x<2 \\ f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2x}} \text{ si } x \geq 2 \end{cases}.$$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.
   a. Déterminer sa fonction de répartition.
   b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1,T_2,T_3, chacune de même loi que X.

4. On considère la variable aléatoire $U=\mathrm{Inf}(T_1, T_2, T_3)$ définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, (U>t)=(T_1>t)\cap(T_2>t)\cap(T_3>t).$$
   a. Déterminer la fonction de répartition G de U.
   b. Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g de U.
   c. Montrer que U admet une espérance et calculer E(U).
5. On considère la variable aléatoire $V = \mathrm{Sup}(T_1, T_2, T_3)$ définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, (V \leq t)=(T_1 \leq t)\cap(T_2 \leq t)\cap(T_3 \leq t)$$
   a. Déterminer la fonction de répartition H de V.
   b. Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V.
   c. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?