BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

296
EML_MATE

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOURNEZ S.V.P.

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b. Déterminer une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$.

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que : $AM = MD$.

2.a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$.

c. Établir que (U, A) est une base de E.

d. Calculer le produit UA. Est-ce que UA est élément de E ?

3. On note $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour toute $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, par :

$$f(M) = AM - MD.$$

a. Vérifier que f est linéaire.

b. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

c. Quelle est la dimension de l'image de f ?

d. Déterminer les matrices M de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.
En déduire que 1 est valeur propre de f.
Montrer que -1 est aussi valeur propre de f.

e. Est-ce que f est diagonalisable ?

f. Montrer : $f \circ f \circ f = f$.

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x-1)(y-2)(x+y-6).$$

1.a. Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F.

b. Est-ce que F présente un extrémum local au point $(4, 2)$?
Est-ce que F présente un extrémum local au point $(2, 3)$?

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = x(x-2)(2x-5).$$

a. Montrer : $\quad \forall x \in [4\,; +\infty[, \quad (x-2)(2x-5) \geqslant 4.$

b. En déduire : $\quad \forall x \in [4\,; +\infty[, \quad \varphi(x) \geqslant 4x \quad$ et $\quad \varphi(x) \in [4\,; +\infty[.$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n).$$

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ.

b. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 4^{n+1}.$
Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

c. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{10}$.

4. On note $g : [4\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4\,; +\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

b. Trouver trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [4\,; +\infty[, \quad g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}.$$

c. Calculer $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

a. Rappeler l'expression d'une densité de U.

b. En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \forall x \leqslant 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}. \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité f.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et que $\mathrm{E}(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b. Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $\mathrm{P}(X^2 \leqslant y)$. *On distinguera les cas* $y \leqslant 0$ *et* $y > 0$.

c. Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $\mathrm{V}(X)$ et calculer $\mathrm{V}(X)$.

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(Z = k) = p\,(1-p)^{k-1}$.
Rappeler la valeur de l'espérance $\mathrm{E}(Z)$ et celle de la variance $\mathrm{V}(Z)$ de la variable aléatoire Z.

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2 et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

a. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.

b. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\Big(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n\Big)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$.