

## 2 Exercices et questions sans préparation donnés en option économique

### 2.1 Exercices

1. À tout triplet de nombre réels  $(a, b, c)$ , on associe la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Une telle matrice  $M(a, b, c)$  est-elle diagonalisable ? inversible ?  
(b) Calculer  $(M - I_3)^n$  pour  $n$  entier naturel non nul ( $I_3$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ).  
(c) Déterminer  $M^n$  en fonction de  $I_3$ ,  $M$  et  $M^2$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , puis pour  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. (a) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

- (b) Déterminer une matrice  $P$  inversible et trois réels  $(a, b, c)$  tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

3. Soit  $t$  un nombre réel et  $A(t)$  la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble de ces matrices lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

- (a) Montrer que  $\mathcal{M}$  est stable par produit matriciel.  
(b) Déterminer les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $A(t)$  est inversible. Montrer que dans ce cas,  $A(t)^{-1}$  appartient encore à  $\mathcal{M}$ .  
(c) Résoudre l'équation

$$X^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$$

d'inconnue  $X \in \mathcal{M}$ .

- (d) Soit  $C = A(-1)$ . Déterminer  $C^n$  pour  $n$  entier naturel.

4. Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt .$$

Ensemble de définition, continuité, dérivée, limites, graphe.

5. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n})} dx .$$

Étudier la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , I_n \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x \ln(n)}$$

et déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

6. Soit  $a$  un réel strictement positif. On se propose de déterminer les fonctions  $f$  trois fois dérivables sur un intervalle  $[0, 2a]$  à valeurs réelles et telles que

$$\forall x \in [0, 2a], \frac{f(x)}{2} = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(a - \frac{x}{2}\right) .$$

Montrer qu'il existe  $c \in [0, 2a]$  tel que  $f''(c) = \max_{t \in [0, 2a]} (f''(t))$  et prouver que  $f''(c) = f''\left(\frac{c}{2}\right)$ .

Déterminer alors les solutions  $f$ .

7. On se donne  $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes  $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$  de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

(a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $Y = \sum_{i=1}^n U_i$ .

(b) On suppose  $n \geq 4$ . Calculer, pour chaque entier  $k \in \mathbb{N}$  la probabilité de l'événement  $[Y = k]$  conditionné à l'événement

$$[U_2 = 0] \cap [U_4 = 1]$$

(c) Calculer, pour chaque entier  $k \in \mathbb{N}$ , la probabilité de l'événement  $[Y = k]$  conditionné à l'événement  $[Y > 0]$ .

8. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, A, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on pose  $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$  si  $X(\omega)$  est pair et  $Y(\omega) = \frac{1-X(\omega)}{2}$  sinon.

(a) Déterminer  $[Y = 0]$  et, pour chaque  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ ,  $[Y = k]$ .

(b) Soit  $p \in ]0, 1[$ . On suppose que la loi de  $X$  est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p(1 - p)^k.$$

Déterminer alors la loi de  $Y$  ainsi que son espérance mathématique.

9. Une urne contient des boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue des tirages avec remise tant que les numéros obtenus forment une suite strictement décroissante.
  - (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$  représentant le nombre de tirages effectués.
  - (b) Déterminer son espérance mathématique et la limite de cette espérance quand  $n \rightarrow +\infty$ .

On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante : si  $X$  admet une espérance, alors  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$ .

## 2.2 Questions sans préparation

1. Extrema de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (x - y)^4.$$

2. Montrer que la famille  $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$  définie par

$$p_{1,1} = p_{-1,1} = \frac{1}{32}$$

$$p_{-1,-1} = p_{1,-1} = p_{1,0} = p_{0,1} = \frac{3}{32}$$

$$p_{-1,0} = p_{0,-1} = \frac{5}{32}, \quad p_{0,0} = \frac{8}{32}$$

et  $p_{i,j} = 0$  sinon, peut être considérée comme la loi d'un couple  $(X, Y)$ . Étudier l'indépendance de  $X$  et de  $Y$ ; de  $X^2$  et de  $Y^2$ .

3. On considère la fonction définie par

$$f(x) = (x - 1)^{1/(x-2)}.$$

Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ? Quelle valeur attribuer à  $f(2)$  pour prolonger  $f$  en une fonction continue en  $x = 2$ ? Tracer l'allure du graphe de  $f$  au voisinage de  $x = 2$ .

4. On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes  $U$ ,  $V$  et  $W$  suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . On pose  $X = U + V$  et  $Y = V + W$ . Calculer  $\text{cov}(X, Y)$ .

5. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .  
Déterminer les fonctions de répartition et les espérances mathématiques des variables aléatoires  
 $Y = \inf(X, 1 - X)$ ,  $Z = \sup(X, 1 - X)$  et  $R = \frac{Y}{Z}$
6. Une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite nilpotente s'il existe un entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^p = 0$ . À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?