(a) Existe-t-il une suite de m vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_m)$, avec $m \neq n$, telle que pour tout x de E on ait :

$\|x\| = \sqrt{< x|x_1 >^2 + < x|x_2 >^2 + ... + < x|x_m >^2}$?

(b) Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite de n vecteurs qui vérifient :

$\|x_1\| = \|x_2\| = ... = \|x_n\| = 1$

et pour tout x de E, $\|x\| = \sqrt{< x|x_1 >^2 + < x|x_2 >^2 + ... + < x|x_n >^2}$.

Montrer que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une base de E .

20. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres.
Démontrer que f est diagonalisable.
21. Soit A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe un triplet de scalaires non tous nuls $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une unique valeur propre.
22. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t) dt = 1 + x$.

2 Exercices donnés en option économique

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   La matrice A est-elle inversible ?

   (b) Déterminer tous les entiers naturels p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.

   (c) Existe-t-il un entier n de $\mathbb{N}$ tel que $M^n = A$ si :

   i. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   ii. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité continues.
Soit $U = min(X, Y)$ et $V = max(X, Y)$.
Soient F_X, F_Y, F_U, F_V les fonctions de répartition de X, Y, U et V respectivent.

(a) Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

(b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_U(t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$.

(c) Etablir une relation analogue entre F_V, F_X et F_Y.

(d) On suppose à présent que X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

   i. Quelle est la loi de U ? Que vaut $P(U = X)$?

   ii. Montrer que V a même loi que $Z = X + \frac{1}{2}Y$. En déduire l'espérance et la variance de V.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Définition et propriétés des matrices de passage

   (b) Donner une base et la dimension de $Kerf$.

   (c) Donner une base et la dimension de Imf.

   (d) Donner les valeurs propres et les sous espaces propres de f.

   (e) f est-il diagonalisable ?

   (f) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (g) On note I la matrice identité dans la base canonique. Déterminer les réels a tels que $(A - aI)^2 = I$.

4. Soit E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ f''(x) - (1 + x^4)f(x) = 0$$

   On admet que E contient une unique fonction f_0 vérifiant $f_0(0) = f_0'(0) = 1$.

   (a) Rappeler la définition et les propriétés des fonctions convexes et montrer que f_0^2 est convexe.

   (b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \ f_0(t) \geq 1$.

   (c) montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)} dt$

   On définit f_1 par $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ f_1(x) = f_0(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)} dt$.

   (d) Montrer que $f_1 \in E$ et que f_1 est bornée.

5. Soient $\theta \in [-2, 2]$ et X une variable aléatoire à densité f_θ définie par $f_\theta(x) = \theta x - \frac{\theta}{2} + 1$ si $x \in [0, 1]$ et 0 sinon.

   (a) Donner la définition et des exemples d'estimateurs.

(b) Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.

(c) On admet que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(X)$ admet une espérance et une variance que l'on calculera (on pourra effectuer le changement de variable défini par la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ sur un intervalle adéquat).

On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on pose $\hat{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = 12(\hat{X}_n - \frac{1}{2})$.

(d) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de θ.

6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$.
On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

   (a) Déterminer la loi de Y_n.

   (b) les variables Y_i sont-elles deux à eux indépendantes ?

   (c) Calculer $E(U_n)$ et $V(U_n)$.

   (d) Etudier la convergence de la suite $(\frac{U_n}{n})$.

7. Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi définie par

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{3}.$$

On définit alors des variables aléatoires $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ par
$Y_i = 1$ si $X_i = 1$, et $Y_i = 0$ sinon,
$Z_i = 1$ si $X_i = 0$, et $Z_i = 0$ sinon.
On pose $T_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$, $T_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i$ et $U = T_1 + T_2$.
Déterminer $P_{(T_1=t_1)\cap(T_2=t_2)}(X_i = 1)$.
Déterminer $P_{(U=k)}(T_1 = t_1)$ $(0 \leq t_1 \leq k \leq n)$ et expliquer ce résultat.

8. On dispose d'urnes U_1, U_2,..., U_n,.... La première U_1, contient une boule noire, une boule blanche et une boule de couleur inconnue B. Les suivantes, $U_2, U_3, ..., U_n, ...$ contiennent une boule blanche et une noire.

On tire une première boule de l'urne U_1 qu'on remet dans U_2. Puis on tire une deuxième boule de U_2 qu'on remet dans U_3 etc...

On désigne par p_n la probabilité que la $n^{\text{ième}}$ boule tirée (de U_n) soit blanche.

(a) Dans cette question, on suppose que $p_{1000} = \frac{1}{2} - (\frac{1}{3})^{999}$.
La boule B était-elle blanche ?

(b) Dans cette question, on suppose que, pour tout n supérieur à 1000, on a l'égalité $p_n = \dfrac{2}{3} - (\dfrac{1}{2})\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1+(\frac{1}{3})^n}$.

La boule B était-elle noire ?

On dispose de 7 Euros. Chaque semaine, a lieu une loterie de 100 billets dont 10 sont gagnants. Chaque billet coûte 1 Euro.

9. (a) Dans cette question on veut maximiser la chance de gagner au moins une fois. Discuter l'affirmation "On a intérêt à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

   (b) On veut maximiser le nombre de billets gagnants achetés. Discuter l'affirmation "On a intérêt à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

10. Vous disposez d'une trousse contenant 10 stylos dont un seul fonctionne.

    (a) Vous en essayez un (au hasard), puis s'il y a échec, un deuxième puis, s'il y a échec, vous remettez le premier et vous tirez (au hasard) le troisième puis, s'il y a échec, vous remettez le deuxième et vous tirez (au hasard) le quatrième, puis...

    Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne pour trouver le bon ?

    (b) Vous les essayez l'un après l'autre jusqu'à trouver celui qui fonctionne. Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne ?

    (c) Même question si suppose qu'à chaque essai infructueux, vous remettez (à tort)le stylo dans la trousse et que vous tirez au hasard à nouveau.

11. Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser J chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette configuration (donc à $0.5\ 10^{-J}$ près).

    On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-0.5\ 10^{-J}, 0.5\ 10^{-J}]$, et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération.

    Déterminer une valeur approchée de la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale, en valeur absolue, à $0.5\ 10^{-J+3}$. (On donne $2F(\sqrt{3}) - 1 \approx 0.92$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

12. Soient $a > 0$ et f définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$. Déterminer les extremas de f.

13. (a) Montrer que la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = (\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!})e^{-x}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

    (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation

$$\frac{e^x}{2} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$$

    admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$.
    Dans la suite on note a_n cette solution.

    (c) Ecrire un programme turbo-pascal permettant de calculer le plus "économiquement" possible la valeur de $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$ pour un x donné.

    (d) La suite de terme général a_n est-elle monotone ?