2° Déterminer toutes les droites D de $\mathbb{R}^3$ stables par f, c'est-à-dire telles que $f(D) \subset D$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.
Soit θ un nombre réel. On pose

$$Y_0 = X_0 \quad \text{et pour } n \geqslant 1\,,\ Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n\,.$$

1° Donner la loi de Y_n.

2° Calculer $\mathbf{Cov}(Y_n\,, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

B. Exercices donnés en option économique

Question de Cours: Définition d'un estimateur ; définitions du biais et du risque quadratique d'un estimateur.

On considère n ($n \geqslant 2$) variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de densité

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad T = \text{Max}(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

1° Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

2° Calculer $\mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big)$. En déduire une densité de T puis $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3° On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de θ. Calculer $\mathbb{V}(S')$ et $\mathbb{V}(T')$.

b) Entre les deux estimateurs de θ, S' et T', lequel doit-on préférer ?

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note pour tout endomorphisme u de E et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $u^0 = Id_E$ et

$$u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}}$$

On commence par considérer un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $x \in E$, il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{r(x)}(x) = 0$.

1° Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice réelle (en toute généralité).

2° Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que u^r soit l'application nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

3° Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u ; est-il diagonalisable ?

4° On pose :

$$v = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^k}{k!}\,.$$

Montrer que v est un isomorphisme de E sur E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u.

5° Donner une relation simple entre $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(v - Id)$.

6° Déterminer les valeurs propres de v.

On considère un type de composants électroniques, dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{t^2} \text{ si t} \geq 10 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1° Rappeler les qualités d'une densité de probabilité ; en déduire la valeur du réel c.

2° Déterminer les réels m pour lesquels $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$.

3° Quelle est la probabilité que, sur un lot de 5 composants du type précédent, 3 au moins fonctionnent durant au moins 15 heures ? Deux machines A, B sont équipées de composants du type précédent. Plus précisément,
⋆ A contient deux composants et cesse de fonctionner dès que l'un de ces composants est défectueux ;
⋆ B contient également deux composants mais un seul de ces composants suffit à la faire fonctionner
On note T_A, T_B les durées de fonctionnement de ces machines.

4° Déterminer une densité pour chacune des variables T_A et T_B.

5° Pour chacune des variables T_A, T_B indiquer si elle possède une espérance, et le cas échéant, la calculer.

Question de cours. Rappeler la formule des probabilités totales.

On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité p_2. On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce ; plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0, 1[$.
1° Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer ?

2° Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au n-ième lancer ?

3° Calculer

$$L = \lim_{n\to\infty} r_n.$$

4° Dans cette question on suppose $p_1 = 1/3$ et $p_2 = 1/6$. Écrire en langage Pascal l'expression d'une fonction permettant de calculer la valeur d'un rang n_0 à partir duquel :

$$|r_n - L| \leq 10^{-6}.$$

Soit n et N des entiers non nuls.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N tirages avec remise dans cette urne.

1° Soit F_i la variable aléatoire égale au nombre de fois où le jeton i a été tiré.
Déterminer la loi de F_i.

On pose :

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \,.$$

Déterminer la loi de F, son espérance et sa variance.
Les variables aléatoires F_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

2° Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le numéro i n'a pas été tiré et égale à 1 s'il a été tiré au moins une fois. Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer la probabiité

$$\mathbb{P}_{[X_i=0]}(X_j = 0)\,.$$

Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

Soit $\alpha > 0$, $x_0 > 0$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \quad \text{si} \quad x \geqslant x_0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

1° a) Donner la définition d'une variable aléatoire à densité et vérifier que la fonction f est bien la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.
Déterminer la fonction de répartition de X et donner une allure de son graphe.

On dit que X suit la loi de Pareto de paramètres x_0 et α.

b) Pour quelles valeurs de α la variable X admet-elle une espérance et une variance ? Calculer l'espérance de X lorsqu'elle existe.

c) On suppose $\alpha > 1$ et on pose, pour tout $x > x_0$:

$$M_X(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t} \quad .$$

Calculer $M_X(x)$.

2° On se propose d'établir une réciproque de la propriété précédente. Soit $x_0 > 0$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[x_0, +\infty[$ de densité h continue, à valeurs strictement positives, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ vérifiant :

$$\forall x > x_0\,, \quad M_Y(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t\, h(t)\, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t} = k\, x\,.$$

a) On pose, pour tout $x > x_0$,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que

$$G(x) = \frac{1-k}{k}\, x\, G'(x)\,.$$

b) En calculant, pour tout $x > x_0$, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^{\frac{k}{k-1}}\, G(x)$, déterminer la valeur de $G(x)$, puis la fonction de répartition de Y.
Quelle loi retrouve-t-on ?

Soit X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$ indépendantes.
Calculer $\mathbb{P}\big([X = Y]\big)$.

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donné par

$$f\,(B,\, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1° Déterminer les extrémums de la fonction f ; donner leur nature.

2° Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$ déterminer l'optimum de rendement.

Donner s'il en existe un exemple de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que deux quelconques d'entre eux soient linéairement indépendants. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont ces trois vecteurs soient vecteurs propres ?

1° Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.

a) $\mathcal{F}$ peut-elle être une famille libre ?

b) On suppose que toute sous-famille de n vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre. Démontrer que les $n+1$ valeurs propres associées respectivement aux $n+1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ sont égales.
Que peut-on en conclure pour f ?

Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ sont notées A et B. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2° v peut-il être bijectif ? Déterminer $\operatorname{Im} v$.

3° Déterminer $\operatorname{Ker} u$.

4° Donner la forme des matrices A et B.

C. Exercices donnés en option technologique

Rappeler la définition et les propriétés de la loi de Poisson.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
X suit une loi de Poisson de paramètre 2 et Y suit une loi de Poisson de paramètre 3.

1° On pose $Z = X + Y$.