SUJET Maths Appliquéees 1

Exercice principal Maths Appliquéees 1

Soit m un réel strictement positif et f lendomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id lendomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = Id$ et pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*, g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Question de cours : critère de diagonalisabilité d'une matrice selon les sous espaces propres.
2. (a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de M et de I. En déduire un polynôme annulateur non nul de M.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Soient p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par $p = \dfrac{1}{3}(f + Id)$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2Id)$.
   (a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n appartenant à $\mathbb{N}, p^n$ et q^n.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de f^n en fonction de p et q.
   (c) Déterminer deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $M^n = a_n I + b_n M$.
   (d) Cette dernière formule reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Solution :

1. Question de cours : un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres de f est égale à la dimension de E.
2. (a)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$$

   Ainsi, $P(X) = X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de M.

   (b) Les valeurs propres de M sont racines du polynôme annulateur, ainsi les seules valeurs propres possibles de M sont -1 et 2.
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(M+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z & = 0 \\ mx + y + \frac{1}{m}z & = 0 \\ m^2x + my + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2x + my + z = 0$$

   -1 est donc valeur propre de M, et $E_{-1}(M) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. $\dim(E_{-1}(M)) = 2$.

$$(M-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2m}y = 0 \\ \frac{3m}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$$

2 est donc valeur propre de M et $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\m\\m^2\end{pmatrix}\right\}$. $\dim(E_2(M)) = 1$

La somme des dimensions des sous espaces propres est est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc M est diagonalisable.

3. (a) Dans la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-m^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-m\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\m\\m^2\end{pmatrix}\right\}$ de vecteurs propres de f, on appelle D la matrice $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ est $P = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, la matrice de l'endomorphisme q est $Q = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$PQ = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = QP$, donc les endomorphismes $p\circ q$ et $q \circ p$ sont nuls.

$p^0 = Id$ et $q^0 = Id$.

Pour tout entier naturel n, $P^n = P$ donc $p^n = p$; $Q^n = Q$ donc $q^n = q$.

(b) $f = 2p - q$, et p et q commutent, donc pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
f^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k p^k (-1)^{n-k} q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} \times p\circ q + 2^n p^n + (-1)^n q^n \\
&= 2^n p + (-1)^n q
\end{aligned}$$

(c) $f^0 = Id$ et d'après l'égalité précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \dfrac{2^n + 2\times(-1)^n}{3} Id + \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} f$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $f^n = a_n Id + b_n f$, avec $a_n = \dfrac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}$; $b_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$. (Ces formules donnent bien $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$).

(d) D'après la question 2.a), $M^2 = M + 2I$ donc $M\left(\dfrac{1}{2}(M-I)\right) = I$. M est donc inversible d'inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{2}(M-I)$.

Ainsi, $f^{-1} = \dfrac{1}{2}f - \dfrac{1}{2}Id$. En posant $a_{-1} = -\dfrac{1}{2}$ et $b_{-1} = \dfrac{1}{2}$, on étend bien les formules précédentes à $n = -1$.

On suppose que ces formules sont vraies pour un certain rang $n < 0$ fixé : $f^n = a_n Id + b_n f$ avec $a_n = \dfrac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Alors

$$\begin{aligned}
f^{n-1} &= f^n \circ f^{-1} \\
&= (a_n Id + b_n f)\circ\left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}Id\right) \\
&= \frac{b_n}{2} f^2 + \frac{a_n - b_n}{2} f - \frac{a_n}{2} Id \\
&= \frac{b_n}{2}(f + 2I) + \frac{a_n - b_n}{2} f - \frac{a_n}{2} Id \\
&= \left(b_n - \frac{a_n}{2}\right) Id + \frac{a_n}{2} f
\end{aligned}$$

Or, $b_n - \dfrac{a_n}{2} = \dfrac{2^n - (-1)^n - 2^{n-1} - (-1)^n}{3} = \dfrac{2^{n-1} + 2\times(-1)^{n-1}}{3}$

et $\dfrac{a_n}{2} = \dfrac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} = \dfrac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}$

Ce qui permet d'écrire $f^{n-1} = a_{n-1} Id + b_{n-1} f$ en étendant les formules trouvées à la question c. Ces formules sont donc bien valables pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. X et ε sont supposées indépendantes.

1. Ecrire un script en Python permettant de simuler 1000 réalisations de la variable aléatoire $Y=\varepsilon X$ et d'en afficher une représentation.
2. Trouver la loi de Y.

Solution :

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd

n = 1000
def simu_epsilon():
        if rd.random() < 1/2:
                eps = -1
        else:
                eps=1
        return eps

Epsilon=[simu_epsilon() for k in range(n)]
X=rd.normal(0,1,n)
Y=Epsilon*X

plt.hist(Y)
plt.show()
```

On a $X(\Omega)=\mathbb{R}$ donc $Y(\Omega)=\mathbb{R}$. On note F_Y la fonction de répartition de Y : $\forall y\in\mathbb{R}, F_Y(y)=P(\varepsilon X\leqslant y)$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(\varepsilon=-1,\varepsilon=1)$ donne : $F_Y(y)=P((X\leqslant y)\cap(\varepsilon=1))+P((-X\leqslant y)\cap(\varepsilon=-1))$. Par indépendace de ϵ et X on obtient : $F_Y(y)=\dfrac{1}{2}P(X\leqslant y)+\dfrac{1}{2}P(-X\leqslant y)=\dfrac{1}{2}\Phi(y)+\dfrac{1}{2}(1-\Phi(-y))$, où Φ est la fonction de répartition de X qui est une variable à densité. Finalement : $F_Y(y)=\Phi(y)$, car $\Phi(-y)=1-\Phi(y)$ pour tout réel y. Comme la fonction de répartition caractérise la loi : Y et X suivent la même loi.

Question supplémentaire : Le résultat obtenu reste-t-il valable si X suit une loi normale centrée quelconque ?
On note $X\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, avec $\sigma>0$. Les calculs précédents donnent, pour tout $y\in\mathbb{R}$:
$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{X}{\sigma}\leqslant\dfrac{y}{\sigma}\right)+\dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{X}{\sigma}\geqslant-\dfrac{y}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{y}{\sigma}\right)+\dfrac{1}{2}\left(1-\Phi\left(-\dfrac{y}{\sigma}\right)\right)=\Phi\left(\dfrac{y}{\sigma}\right)$.
De nouveau, X et Y suivent la même loi.

SUJET Maths Appliquéees 2

Exercice principal Maths Appliquéees 2

On considère un entier naturel $n \geqslant 3$, un entier naturel impair $N \geqslant 3$ et un réel $S > 0$. On note $N = 2p+1$.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, \ldots, J_n$. Le jeu consiste à lancer N fois une pièce équilibrée par une machine. Avant les lancers, chaque joueur prédit le résultat de chaque lancer. Sont déclarés gagnants les joueurs ayant obtenu le plus grand nombre de prévisions correctes (dans l'ordre) ; ils se partagent alors la somme de S euros.

Par exemple, si $N = 3$ et si les lancers donnent PFP, un joueur ayant prédit FFP aura deux prévisions correctes.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k le nombre de prévisions correctes du joueur J_k et G_k son gain.

1. Cours : énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{E}(G_k) = \dfrac{S}{n}$.
3. Écrire en Python une fonction `jeu` simulant le jeu et renvoyant une liste de n nombres représentant le gain de chaque joueur.
4. On suppose que les joueurs J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : le joueur J_1 choisit les prévisions contraires à celles du joueur J_2 (qui choisit ses prévisions au hasard). Les joueurs J_1 et J_2 décident de partager leur gain à l'issue du jeu.

   Par exemple, si $N = 3$ et si le joueur J_2 choisit PPF, le joueur J_1 choisit FFP.

   Les autres joueurs jouent indépendamment des deux joueurs J_1 et J_2. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_3, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, tout comme les variables aléatoires $X_2, X_3, \ldots, X_n$.

   On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $H = G_1 + G_2$.

   (a) Justifier que toutes les variables aléatoires X_k suivent une même loi à déterminer.
   Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $q_i = \mathbb{P}(X_k = i)$ et $f_i = \mathbb{P}(X_k \leqslant i)$.

   (b) Déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y.

   (c) Justifier que $f_p = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in Y(\Omega)$, montrer que :
   $$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j}.$$

   (e) En déduire $\mathbb{E}(H),\ \mathbb{E}(G_1)$ et $\mathbb{E}(G_2)$. La stratégie des joueurs J_1 et J_2 est-elle avantageuse ?

Solution :

1. Cf. programme de première année, page 25.
2. Par symétrie des rôles de chaque joueur, les espérances de gain de chaque joueur sont égales.
   Puisque $G_1 + \cdots + G_n = S$, on en déduit par linéarité que, pour tout $k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{E}(G_k) = \dfrac{S}{n}$.
3.

```python
import numpy.random as rd

def jeu(N,n,S):
    X = [0 for k in range(n)]
    for i in range(N):
        lancer = rd.randint(0,2)
        # print(lancer)
        for k in range(n):
            if rd.randint(0,2) == lancer:
```

```
                X[k] += 1
        # print(X)
    m = max(X)
    gagnants = []
    for k in range(n):
        if X[k] == m:
            gagnants.append(k)
    gain = S/len(gagnants)
    G = [0 for k in range(n)]
    for k in gagnants:
        G[k] = gain
    return G
```

4. (a) Les variables aléatoires X_k suivent toutes la loi binomiale de paramètre N et $\frac{1}{2}$: elles sont égales au nombre de succès (« prédire le résultat d'un lancer ») lors de la répétition de N expériences de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

(b) Puisque $X_2 = N - X_1$, on trouve immédiatement que $Y(\Omega) = [\![p+1, N]\!] = [\![p+1, 2p+1]\!]$.

(c) On sait que :

$$f_p = \mathbb{P}(X_i \leqslant p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
f_p &= 1 - \mathbb{P}(X_i > p) \\
&= 1 - \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}} \\
&= 1 - \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{2p+1-k} \frac{1}{2^{2p+1}} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}} \\
&= 1 - f_p.
\end{aligned}$$

On en déduit que $f_p = \frac{1}{2}$.

(d) Remarquons que, puisque N est impair, X_1 et X_2 ne peuvent prendre la même valeur (car $X_2 = N - X_1$).
Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in Y(\Omega)$.
Réaliser l'événement $[H = \frac{S}{j}, Y = i]$ revient à réaliser l'événement $[Y = i]$ (de probabilité $2q_i$) et choisir $j-1$ joueurs parmi les $n-2$ joueurs J_3 à J_n qui obtiennent i prévisions correctes et $(n-2)-(j-1) = n-j-1$ joueurs qui obtiennent au plus $i-1$ prévisions correctes. Par indépendance, on trouve que :

$$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2q_i \binom{n-2}{j-1} q_i^{j-1} f_{i-1}^{n-1-j} = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j}.$$

(e) Par définition, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(H) &= 0 \times P(H=0) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2S}{j} \mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}\right) \\
&= 2S \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \frac{1}{j} \binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= 2S \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{j!(n-1-j)!} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \left(f_i^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(f_{2p+1}^{n-1} - f_p^{n-1}\right) \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \dfrac{S}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

On peut prouver par récurrence que $n < 2^{n-1}$ (pour $n \geqslant 3$). Ainsi :

$$
\mathbb{E}(G_1) > \frac{S}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{S}{n}.
$$

La stratégie des joueurs J_1 et J_2 est donc avantageuse.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 2

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Solution :
Soit $x \in [1, +\infty[$ et $A \geqslant x$.
$\displaystyle\int_x^A e^{-t^2}dt = \int_x^A (-2te^{-t^2})\frac{1}{-2t}dt.$
On fait une intégration par parties en posant $u(t) = -\dfrac{1}{2t}$ et $v(t) = e^{-t^2}$ pour $t > 0$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, A]$. On obtient :
$\displaystyle\int_x^A e^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right]_x^A + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt = -\frac{1}{2A}e^{-A^2} + \frac{1}{2x}e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt.$
Par croissances comparées, on a : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}e^{-A^2} = 0$. Puis, pour tout $t \in [x, A]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{e^{-t^2}}{t^2} \leqslant \dfrac{e^{-t^2}}{x^2}$.
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par théorème de comparaison, les fonctions étant positives, on a la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Ainsi, par comparaison de fonctions positives : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt$ converge et on a l'inégalité :
$\displaystyle 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$, ce qui justifie par théorème d'encadrement que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)$, et finalement : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Question supplémentaire : En déduire, pour $0 < a < b$, la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b e^{-nt^2}dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_a^b e^{-nt^2}dt$.
Par changement de variable $x = \sqrt{n}t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$\displaystyle I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}dx - \int_{b\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right).$
En utilisant l'équivalent précédent : $\displaystyle I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e^{-na^2}}{2a\sqrt{n}} - \frac{e^{-nb^2}}{2b\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{e^{-na^2}}{2an}\left(1 - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{b} + o\left(e^{-na^2}\right)\right).$
Comme $a < b$, on obtient :
$\displaystyle\ln(I_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{e^{-na^2}}{2an}\left(1 - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{b} + o\left(e^{-na^2}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -na^2 - \ln(2an) - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{b} + o\left(e^{-na^2}\right).$
Ainsi : $I_n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(I_n)} = e^{-a^2 - \frac{\ln(2an)}{n} - \frac{ae^{-n(b^2-a^2)}}{bn} + o\left(\frac{e^{-na^2}}{n}\right)}$, par croissances comparées, on obtient :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n^{\frac{1}{n}} = e^{-a^2}$.

SUJET Maths Appliquéees 3

Exercice principal Maths Appliquéees 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres. Pour tout i de $1, 2, ..., n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si lurne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.
Pour tous i et k de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement : « l'urne i est choisie à la k^{ieme} épreuve ».

1. Question de cours : espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
2. (a) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

   (b) Si $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et en déduire un équivalent simple de $E(Y_n)$ au voisinage de $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu.
4. On considère le programme suivant :

```
import numpy.random as rd
def simulation(n):
  L = n*[n]
  X = n*[0]
  N = n*[0]
  for k in range(n):
    i = rd.randint(0,n)
    L[i] = L[i]-1
  for j in range(n):
    N[j] = n-L[j]
    .............
    .............
  return(X,N)
```

   (a) Compléter le programme afin que X contienne les valeurs prises par les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ à la fin de l'expérience.

   (b) Que représente les variables aléatoires N_i renvoyées par cette fonction ?

   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Sous réserve de convergence absolue :
   $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \times P([X = x] \cap [Y = y])$
   Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. (a) Pour tout $i \in \{1, ..., n\}, (X_i = 1) = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} U_{i,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$.

   Par indépendance des tirages, $P(X_i = 1) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{U_{i,k}}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(b) Si i et j sont deux éléments distincts de $\{1,...,n\}$:

$$(X_i=1)\cap(X_j=1)=\overline{\bigcup_{i=1}^{n}(U_{i,k}\cup U_{j,k})}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{U_{i,k}\cup U_{j,k}}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{U_{i,k}}\cap\overline{U_{j,k}}$$

Or $P(\overline{U_{i,k}}\cap\overline{U_{j,k}})=1-\dfrac{2}{n}$.
Par indépendance des tirages :

$$P\left((X_i=1)\cap(X_j=1)\right)=\prod_{k=1}^{n}P\left(\overline{U_{i,k}}\cap\overline{U_{j,k}}\right)=\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$

(c) Soient i et j deux éléments distincts de $\{1,...,n\}$:

$$P(X_i=1)\times P(X_j=1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n>\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$

Donc $P(X_i=1)\times P(Y_j=1)\neq P\left((X_i=1)\cap(X_j=1)\right)$. Les variables X_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

3. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$. Par linéarité de l'espérance : $E(Y_n)=n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(Y_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1-x)}{x}}$
Or $\ln(1-x)\underset{0}{\sim}-x$, ainsi $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(Y_n)}{n}=\mathrm{e}^{-1}$.
On déduit qu'un équivalent simple de $E(Y_n)$ au voisinage de $+\infty$ est $n\mathrm{e}^{-1}$.
Y_n représente le nombre d'urnes contenant toujours n boules à la fin des n tirages. En moyenne, un tiers des urnes reste intouché.

4. (a) On complète ainsi le programme :

```python
import numpy.random as rd
def simulation(n):
  L=n*[n]
  X=n*[0]
  N=n*[0]
  for k in range(n):
    i=rd.randint(0,n)
    L[i]=L[i]-1
  for j in range(n):
    N[j]=n-L[j]
    if L[j]==n:
      X[j]=1
  return(X,N)
```

(b) Pour tout i appartenant à $\{1,...,n\}$, N_i est le nombre de boules manquantes dans l'urne i à la fin des n tirages. N_i suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{n}$. $E(N_i)=1$.

(c) Lorsque X_i vaut 1, N_i vaut 0, donc $N_iX_i=0$ et ainsi N_iX_i admet une espérance qui est nulle. Or $E(X_i)E(N_i)=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\neq0$ donc les variables aléatoires X_i et N_i ne sont pas indépendantes.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$ et soit y une solution de l'équation différentielle $y'' = f(y)$ sur $[-a, a]$ ($a > 0$). On suppose que $y(-a) = y(a)$. Montrer que y est paire en étudiant l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \,\mathrm{d}t,$$

Solution :
Calculons l'intégrale de l'énoncé par parties. Remarquons que $y'' = f(y)$ est continue sur $[-a, a]$ par composition. Puisque les fonctions $t \mapsto y(t) - y(-t)$ et $t \mapsto y'(t) + y'(-t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$, on trouve que :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \,\mathrm{d}t &= \Big[\left(y'(t) + y'(-t)\right)\left(y(t) - y(-t)\right) \Big]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \left[y''(t) - y''(-t)\right]\left[y(t) - y(-t)\right] \mathrm{d}t \\ &= -\int_{-a}^{a} \left[f(y(t)) - f(y(-t))\right]\left[y(t) - y(-t)\right] \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in [-a, a]$, $f(y(t)) - f(y(-t))$ est du même signe que $y(t) - y(-t)$ et donc que :

$$\left[f(y(t)) - f(y(-t))\right]\left[y(t) - y(-t)\right] \geqslant 0.$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Par positivité de l'intégrale et continuité de l'intégrande, il vient que :

$$\forall t \in [-a, a], \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in [-a, a], y'(t) + y'(-t) = 0.$$

La dérivée de la fonction $\varphi : t \mapsto y(t) - y(-t)$ s'annule sur $[-a, a]$. Puisque φ s'annule en a par hypothèse, φ est la fonction nulle, i.e. y est une fonction paire.

SUJET Maths Appliquéees 4

Exercice principal Maths Appliquéees 4

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. Cours : Énoncer les trois théorèmes de comparaison de séries à termes positifs.
2. Écrire un script Python permettant de représenter la fonction P_{100} sur $[-1, 1]$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_n'(x) = \dfrac{Q_n(x)}{(x-1)^2}$ où Q_n est une fonction polynômiale à déterminer.
4. Déterminer les variations de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en particulier que P_n admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en un unique point u_n de $]-1, 0[$.
5. Compléter le code ci-dessous afin que l'instruction `u(n)` renvoie une approximation de u_n à 10^{-3} près.

```
def Q(n,x):
    return ...

def u(n):
    a, b = ..., ...
    while b-a > ...:
        c = (a+b)/2
        if Q(n,a)*Q(n,c) < 0:
            ...
        else:
            ...
    return ...
```

6. Déterminer un équivalent simple de $\ln(2n + 1 - 2nu_n)$.
7. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
8. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = u_n + 1$. Déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Cf. programme de seconde année, page 9.
2.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def P(n,x):
    s = 0
    puissancex = 1
    for k in range(0,2*n+1):
        s += puissancex
        puissancex *= x
    return s

abs = np.linspace(-1,1,100)
ord = [P(100,x) for x in abs]
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ P_n(x) = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x} = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1},$$
on trouve que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ P_n'(x) = \frac{Q_n(x)}{(x-1)^2}$$
où :
$$Q_n(x) = (2n+1)x^{2n}(x-1) - \left(x^{2n+1}-1\right) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que P_n est continue sur $\mathbb{R}$. Étudier ses variations sur $\mathbb{R}$ revient donc à étudier ses variations sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_n'(x) = 2n(2n+1)x^{2n} - 2n(2n+1)x^{2n-1} = 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1).$$
La fonction Q_n est croissante sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et décroissante sur $[0,1]$. Puisque $Q_n(0) = 1$ et $Q_n(1) = 0$, le théorème de la bijection assure que Q_n s'annule en un unique point $u_n \in]-\infty, 0[$. En effet, Q_n est continue sur $\mathbb{R}$ et change de signe sur $]-\infty, 0]$, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} Q_n(x) = -\infty$. On en déduit que P_n est décroissante sur $]-\infty, u_n]$ et croissante sur $[u_n, +\infty[$. La fonction P_n atteint donc un minimum en un unique point $u_n \in \mathbb{R}$.

5.
```python
def Q(n,x):
    return 2*n*x**(2*n+1) - (2*n+1)*x**(2*n)+1

def u(n):
    a, b = -1,0
    while b-a > 2*10**-3:
        c = (a+b)/2
        if Q(n,a)*Q(n,c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return c
```

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarquons que $P_n(-1) = 1$. On en déduit que $-1 < u_n < 0$, puis $\ln(2n+1) < \ln(2n+1-2nu_n) < \ln(4n+1)$. On en déduit alors que $\ln(2n+1-2nu_n) \sim \ln n$.

7. Puisque $Q_n(u_n) = 0$, on trouve que $2nu_n^{2n+1} - (2n+1)u_n^{2n} + 1 = 0$, puis $\ln(2n+1-2nu_n) = -2n\ln(-u_n)$. On en déduit que $\ln(-u_n) \sim -\dfrac{\ln n}{2n}$. Il vient alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(-u_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.

8. Remarquons que $-u_n = 1 - h_n$. Ainsi, d'après la question précédente $\ln(1-h_n) \sim -\dfrac{\ln n}{2n}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 0$, donc :
$$h_n \sim -\ln(1-h_n) \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ? Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

Solution :
La matrice M est réelle et symétrique donc diagonalisable : la probabilité vaut 1.
On note A l'événement "M est inversible". Déterminons les valeurs propres de A.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $det(M-\lambda I_2) = (X-\lambda)^2 - Y^2 = (X-\lambda-Y)(X-\lambda+Y)$. Les valeurs propres de M sont donc $X-Y$ et $X+Y$. Pour que A soit réalisé, il faut et il suffit que 0 ne soit pas valeur propre de M. Or $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $X+Y \geqslant 1$ et l'événement $(X+Y \neq 0)$ est toujours réalisé.

Ainsi, $P(A) = P(X-Y \neq 0) = 1 - P(X=Y)$. La formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ donne : $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=k))$.

Par indépendance des variables X et Y, on a $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^{k-1}p)^2 = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$.

Finalement : $P(A) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}$.

Question supplémentaire : On note Λ_1 et Λ_2 les valeurs propres de M. Est-ce que les variables aléatoires Λ_1 et Λ_2 sont indépendantes ?
On pose, sans perte de généralité, $\Lambda_1 = X - Y$ et $\Lambda_2 = X + Y$. On 'intéresse aux événements $(\Lambda_1 = 0)$ et $(\Lambda_2 = 3)$. On a $P((\Lambda_1 = 0)\cap(\Lambda_2 = 3)) = 0$. On a aussi : $P(\Lambda_1 = 0) = P(X=Y) = \frac{p}{2-p} \neq 1$, et
$P(\Lambda_2 = 3) \geqslant P(X_1 = 1)P(Y=2) > 0$, on conclut donc que Λ_1 et Λ_2 ne sont pas indépendantes.

SUJET Maths Appliquéees 5

Exercice principal Maths Appliquéees 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite.

On note respectivement φ et Φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction de répartition de cette loi.

1. Cours : énoncer le théorème d'intégration par parties.
2. Donner sans justification la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $Z = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité. Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$
4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   (c) En déduire que Z admet une espérance et donner sa valeur.
5. (a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

   (b) En déduire la variance de Z.

Solution :

1. Cours :
2. La loi normale d'espérance 0 et d'écart-type $\frac{1}{\sqrt{2}}$ admet pour densité la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$. On trouve alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a, par indépendance de X et Y :
$$\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X \leqslant z)\mathbb{P}(Y \leqslant z) = \Phi(z)^2.$$
Puisque Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction de répartition de Z l'est aussi. On en déduit que Z est à densité, de densité f donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\Phi'(x)\Phi(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$
4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc $\varphi'(x) = -x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\varphi(x)$.

   (b) Soit $A \in \mathbb{R}_+$.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = 2x\varphi(x)\Phi(x) = -2\varphi'(x)\Phi(x).$$
Les fonctions φ et Φ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ donc par intégrations par parties, on trouve :
$$\begin{aligned}\int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x &= -2\int_0^A \varphi'(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -2\Big[\varphi(x)\Phi(x)\Big]_0^A + 2\int_0^A \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 2\varphi(A)\Phi(A) + 2\int_0^A \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
On en déduit que :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(c) On montre de la même façon que :

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, c'est-à-dire que Z admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

5. (a) Remarquons que X^2 et Z^2 sont positives. Pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z^2 \leqslant z) &= \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leqslant Z \leqslant \sqrt{z})\\ &= \Phi(\sqrt{z})^2 - \Phi(-\sqrt{z})^2\\ &= (\Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z}))(\Phi(\sqrt{z}) + \Phi(-\sqrt{z}))\\ &= \Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z}),\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(X^2 \leqslant z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant \sqrt{z}) = \Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z}) = \mathbb{P}(Z^2 \leqslant z).$$

Les fonctions de répartition de X^2 et Z^2 sont égales sur $\mathbb{R}^+$ (donc sur $\mathbb{R}$) donc X^2 et Z^2 suivent la même loi.

(b) On déduit de la question précédente que Z admet une variance donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{\pi} = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \frac{1}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 5

Un graphe est dit *régulier* s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. Ce degré commun est alors appelé le degré du graphe régulier.

1. Ecrire le code Python d'une fonction `regulier`(M) qui prend en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe simple et qui renvoie un booléen égal à `True` si le graphe est régulier, à `False` sinon.
2. Déterminer les graphes réguliers de degré 0, 1 et 2.
3. Soit G un graphe régulier de degré 3. Que dire du nombre de sommets de G ?

Solution :

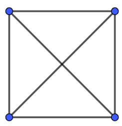
1. Une possibilité est le code suivant :

```
import numpy as np

def regulier(M):
    n=len(M)
    d=np.sum(M[0,:])
    for i in range(1,n):
        if np.sum(M[i,:])!=d:
            return False
    return True
```

2. De manière à peu près immédiate, les graphes réguliers de degré zéro sont formés de sommets déconnectés, les graphes réguliers de degré 1 sont formés d'un ensemble d'arêtes déconnectées. En particulier un tel graphe a un nombre pair de sommets. Enfin un graphe régulier de degré 2 est formé d'un nombre fini de cycles déconnectés.
3. Le nombre de sommets est supérieur ou à égal à 4 car chaque sommet est relié à trois autres sommets. De plus, par la formule d'Euler : $\sum_{x \in G} \deg x = 2m$ où m est le nombre d'arêtes du graphe. Comme $\deg x = 3$ pour tout $x \in G$, on obtient, en notant n le nombre de sommets du graphe : $3n = 2m$ et donc le nombre de sommets est nécessairement pair.

   Question supplémentaire : on peut demander de prouver la réciproque du résultat précédent, à savoir que si k est un entier avec $k \geqslant 2$, il existe toujours un graphe régulier de degré 3 possédant $2k$ sommets.
   Pour $k = 2$, une solution est fournie par le graphe complet à 4 sommets :



   Pour $k \geqslant 3$, on note les sommets $s_1, s_2, \dots, s_{2p}$ et on les sépare en deux moitiés : $\{s_1, \dots, s_p\}$ et $\{s_{p+1}, \dots, s_{2p}\}$.
   On obtient une solution en reliant :
   — s_1 à s_{p+1}, s_{p+2} et s_{p+3} ;
   — s_2 à s_{p+2}, s_{p+3} et s_{p+4}
   — ...
   — s_{p-2} à s_{2p-2}, s_{2p-1} et s_{2p} ;
   — s_{p-1} à s_{2p-1}, s_{2p} et s_{p+1} ;
   — s_p à s_{2p}, s_{p+1} et s_{p+2}.
   On obtient bien ainsi une solution convenable. Un candidat pourra naturellement chercher une telle solution d'abord sur des petites valeurs de p pour avoir une idée du processus de construction général.

SUJET Maths Appliquéees 6

Exercice principal Maths Appliquéees 6

1. Cours : énoncer le théorème central limite.
2. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note G la fonction :

$$G : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k)t^k.$$

   (a) Déterminer l'ensemble D de définition de G et, pour tout $t \in D$ une expression de $G(t)$ en fonction de t. Préciser en particulier la valeur de $G(-1)$.

   (b) En déduire la probabilité que la variable aléatoire Z soit paire.

   (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Z \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (d) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

   (a) Déterminer l'espérance et la variance éventuelles de $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant n)$.

   (c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Cf. programme de seconde année, page 20.
2. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z = k)t^k = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda}$. En reconnaissant une série exponentielle, on trouve que $D = \mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k)t^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda+\lambda t}.$$

   En particulier, $G(-1) = e^{-2\lambda}$.

   (b) D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathbb{P}(Z = n) = e^{-2\lambda}.$$

   Puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z = n) = 1$, on obtient en sommant les deux égalités :

$$1 + e^{-2\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(Z = n) + (-1)^n\mathbb{P}(Z = n)\right] = \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} 2\mathbb{P}(Z = n) = 2\mathbb{P}(Z \in 2\mathbb{N})$$

   On en déduit que la probabilité que Z soit pair est égale à $\dfrac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$.

(c) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Si $n = 0$, $\dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t$ converge et :

$$\frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t = \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z \leqslant 0).$$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour un entier $n-1$. Les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\lambda, +\infty[$. Après intégration par parties (d'abord sur $[\lambda, A]$ puis en faisant tendre A vers $+\infty$), on trouve que $\dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t$ converge et :

$$\frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t = \mathbb{P}(Z = n) + \mathbb{P}(Z \leqslant n-1) = \mathbb{P}(Z \leqslant n).$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; P(Z \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

(d) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z \leqslant n) = 1$, $\mathbb{P}(Z \leqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$ et donc $\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\sim} n!$.

3. (a) Puisque Y_n est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson, Y_n suit une loi de Poisson : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$. En particulier $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{V}(Y_n) = n$.

(b) En notant $\overline{X}_n = \dfrac{Y_n}{n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, et $\mu = 1$ et $\sigma = 1$ (l'espérance et l'écart-type de la loi de Poisson de paramètre 1), on remarque que :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \mathbb{P}(\overline{X}_n \leqslant 1) = \mathbb{P}(\overline{X}_n \leqslant \mu) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \leqslant 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}_n^* \leqslant 0\right).$$

D'après le théorème central limite, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\overline{X}_n^* \leqslant 0\right) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

(c) D'après la question 2.(c), on a :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{n}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

On en déduit alors que :

$$\int_{n}^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n!}{2}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 6

On considère une base de donnée de location de voitures dont le schéma relationnel est donné par :

voiture (id_voiture, marque, modele, etat)
client (id_client, nom, prenom, adresse, num_permis)
location (id_loc, voiture, client, date_debut, date_fin)

1. Identifier les clés primaires et les éventuelles clés étrangères de chacune des tables.
2. L'état d'une voiture à louer est désigné par l'une de ces dénominations : « *neuf* », « *bon* », « *abimé* », « *au garage* ». Déterminer la liste des voitures qui sont actuellement dans l'un des deux meilleurs états.
3. Déterminer la liste des voitures (identifiant, marque et modèle) qui ont déjà été louées ou en cours de location.
4. Déterminer tous les clients (identifiant, nom et prénom) qui ont loué une Renault. On pourra réaliser une requête imbriquée, de la forme :

```sql
SELECT *
FROM table1
WHERE attribut IN (
    SELECT attribut2
    FROM table2
)
```

Solution :

1. L'attribut `id_voiture` est la clé primaire de la table `voiture`.
   L'attribut `id_client` est la clé primaire de la table `client`.
   L'attribut `id_loc` est la clé primaire de la table `loc`.
   L'attribut `voiture` est une clé étrangère de la table `location` faisant référence à la clé primaire de la table `voiture`.
   L'attribut `client` est une clé étrangère de la table `location` faisant référence à la clé primaire de la table `client`.

2.
```sql
SELECT *
FROM voiture
WHERE etat = "neuf" or etat = "bon"
```

3.
```sql
SELECT id_voiture, marque, modele
FROM voiture
JOIN location ON id_voiture = voiture
```

4.
```sql
SELECT id_client, nom, prenom
FROM client
WHERE id_client IN (
    SELECT client
    FROM location
    JOIN voiture ON id_voiture = voiture
    WHERE marque = "Renault"
)
```

SUJET Maths Appliquéees 7

Exercice principal Maths Appliquéees 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2.$$

On note $C = [-1,1] \times [-1,1]$, une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

1. **Cours :** Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   Rappeler les conditions suffisantes pour que (x_0, y_0) soit un minimum local pour g.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur C.
3. Etudier la nature du point critique de f qui se trouve dans C.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur C.
5. Soit $\lambda > 1$. On s'intéresse à la ligne de niveau λ, notée L_λ de la fonction f.
   (a) Déterminer deux fonctions φ_1 et φ_2 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_1(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_2(x)\}$.
   (b) Ecrire un code Python qui réalise le tracé des lignes de niveau L_λ pour $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et $\lambda \in \{1{,}01; 1{,}2; 2{,}2; 3{,}2; 4{,}2\}$.

Solution :

1. **Cours**
2. La fonction f est continue sur C en tant que somme et produit des fonctions coordonnées qui le sont. De plus, C est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$, donc f est bornée et atteint ses bornes sur C.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme et produit des fonctions coordonnées qui le sont. On détermine les points critiques (x,y) de f en résolvant le système : $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-y) &= 0 \\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases}$
   La première ligne donne $x = 0$ ou $y = 1$ et la seconde ligne $x^2 = 2y$. On trouve donc trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, 1)$ et $(-\sqrt{2}, 1)$. $(0,0)$ est le seul point critique de f qui se trouve dans C, étudions sa nature.
   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme et produit des fonctions coordonnées qui le sont. On détermine les valeurs propres de la hessienne, notée H en ce point. En calculant les dérivées secondes de f en $(0,0)$, on trouve $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont strictement positives, on a donc un minimium local en $(0,0)$ pour f et $f(0,0) = 0$.
   C'est un minimum global sur C car :
   $$\forall (x,y) \in C, \quad x^2 y \leqslant |x|\,|y| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \textit{(par identité remarquable),}$$
   donc pour tout $(x,y) \in C,\ f(x,y) \geqslant 0 = f(0,0)$.
   Ce n'est pas un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ car $f(1,0) = 1 > 0$ et $f(3,2) = -5 < 0$.
4. La question 3. nous donne le minimum de f sur C atteint en $(0,0)$. Il reste à déterminer le maximum de f sur C. L'étude des points critiques justifie que ce maximum se trouve sur le bord de C. On étudie donc les valeurs de f sur chacun des bords du carré C :
   — Sur $C_1 = [-1,1] \times \{1\}$, $f(x,y) = f(x,1) = 1$, la fonction est constant et son maximum vaut 1,
   — Sur $C_2 = [-1,1] \times \{-1\}$, $f(x,y) = f(x,-1) = 1 + 2x^2$, la fonction atteint son maximum quand x vaut 1 ou -1 et la valeur du maximum est 3,
   — Sur $C_3 = \{1\} \times [-1,1]$ ou $C_4 = \{-1\} \times [-1,1]$, $f(x,y) = y^2 - y + 1$. L'étude de $y \mapsto y^2 - y + 1$ sur $[-1,1]$ justifie que la fonction est décroissante sur $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Elle atteint son maximum en $y = -1$ et il vaut 3.
   Ainsi, f admet un maximum sur C aux points $(1,-1)$ et $(-1,-1)$ qui vaut 3.

5. (a) Par définition, $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \lambda\}$.
Il s'agit d'exprimer y en fonction de x dans l'équation : $y^2 - x^2y + x^2 - \lambda = 0$. On reconnait une fonction polynomiale de degré 2 en y de discriminant $\Delta = x^4 - 4(x^2 - \lambda)$. Pour déterminer le signe de ce discriminant, on reconnait une fonction polynomiale de degré 2 en x^2 de discriminant $16(1-\lambda) < 0$ et de coefficient de plus haut degré positif. Ainsi, $\Delta > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda > 1$.
L'équation étudiée admet donc deux solutions : $y_1 = \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$.
Les fonctions $\varphi_1 : x \mapsto \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$ et $\varphi_2 : x \mapsto \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$ répondent à la question.

(b) Une possibilité est :

```python
import math as m
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def ph1(x,la):
    return (x**2+m.sqrt(x**4-4*(x**2-la)))/2

def ph2(x,la):
    return (x**2-m.sqrt(x**4-4*(x**2-la)))/2

L_la=[1.01,1.2,2.2,3.2,4.2]
L_c=['r','b','g','c','m']

for i in range(0,len(L_la)):
    Lx=np.linspace(-4,4,10**4+1)
    Ly1=[ph1(x,L_la[i]) for x in Lx]
    Ly2=[ph2(x,L_la[i]) for x in Lx]
    plt.plot(Lx,Ly1,label='$\lambda$='+str(L_la[i]),color=L_c[i])
    plt.plot(Lx,Ly2,color=L_c[i])

plt.legend()
plt.show()
```

On peut noter que `matplotlib.pyplot` dispose de fonctions permettant de tracer directement les lignes de niveau d'une fonction de deux variables, mais ces fonctions ne sont pas au programme.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 7

Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et admettant une variance notée σ^2. On suppose que leur loi a la propriété suivante : X_1+X_2 a même loi que $\sqrt{2}X_1$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ et $\sqrt{2^n}X_1$ ont même loi.
2. En déduire la loi commune à toutes les variables de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution :

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
   Le résultat est vérifié par hypothèse pour $n=1$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ et $\sqrt{2^n}X_1$ ont même loi.
   Remarquons que $X_{2^n+1}+\cdots+X_{2^{n+1}}$ suit la même loi que $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ donc que $\sqrt{2^n}X_2$ par hypothèse de récurrence.
   Puisque les variables aléatoires $X_1+X_2+\cdots+X_{2^n}$ et $X_{2^n+1}+\cdots+X_{2^{n+1}}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions, leur somme $X_1+\cdots+X_{2^{n+1}}$ suit la même loi que $\sqrt{2^n}X_1+\sqrt{2^n}X_2$ donc que $\sqrt{2^{n+1}}X_1$.
2. En notant μ l'espérance de cette loi (dont l'existence est garantie par l'existence de la variance), on a :
$$2\mu=\mathbb{E}(X_1+X_2)=\mathbb{E}(\sqrt{2}X_1)=\mu\sqrt{2}.$$
   On en déduit que $\mu=0$.
   Remarquons que :
$$\sqrt{2^n}\frac{\overline{X}_{2^n}-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\frac{X_1+\cdots+X_{2^n}}{\sqrt{2^n}}$$
   suit la même loi que la variable aléatoire $\dfrac{1}{\sigma}X_1$.
   Or, d'après le théorème central limite, la suite de variable aléatoire $\left(\sqrt{2^n}\dfrac{\overline{X}_{2^n}-\mu}{\sigma}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
   On en déduit donc que $\dfrac{1}{\sigma}X_1$ suit la loi normale centrée réduite donc que X_1 suit la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

SUJET Maths Appliquéees 8

Exercice principal Maths Appliquéees 8

On tire une main de 5 cartes d'un paquet de 32 cartes.

On considère alors les événements A et B suivants :

$$A = \text{« L'as de pique est dans la main »} \quad \text{et} \quad B = \text{« Au moins un as est dans la main »}$$

1. Cours : coefficients binômiaux ; interprétation ensembliste.
2. (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$.

   (b) Sachant que $\dfrac{27 \times 26 \times 25 \times 24}{32 \times 31 \times 30 \times 29} < \dfrac{1}{2}$, montrer que : $\mathbb{P}(B) > 2\mathbb{P}(A)$

On note maintenant X la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main de cinq cartes,
Y la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main contenant l'as de pique,
Z la variable aléatoire égale au nombre d'as d'une main contenant au moins un as.

On se propose de comparer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

3. Etude empirique.

   On suppose qu'on dispose d'une fonction Python `ma_main()` qui ne prend aucun argument et qui renvoie une main déterminée de manière aléatoire. Une telle main sera représentée par un tableau de 5 couples `(val,coul)` où `val` est élément de la liste `[7, 8, 9, 10, 'valet', 'dame', 'roi', 'as']` et `coul` de la liste `['trefle', 'carreau', 'coeur', 'pique']`.

   (a) Ecrire le code d'une fonction Python `as_de_pique(m)` qui prend en argument une main `m` de cinq cartes, et qui renvoie `True` si la main contient l'as de pique, `False` sinon.

   (b) Ecrire le code d'une fonction Python `nbre_as(m)` qui prend en argument une main `m` de cinq cartes et qui renvoie le nombre d'as contenus dans la main.

   (c) Compléter la première boucle `for` dans le code de la fonction `estimation(N)` suivante, qui prend en entrée un entier `N` et réalise une estimation des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

```python
import numpy as np

def estimation(N):
        a,b=0,0
        xA,xB=np.zeros(5),np.zeros(5)
        for i in range(N):
                main=ma_main()
                ........................
        sY=0 ; sZ=0
        for k in range (1,5) :
                sY+=k*xA[k]
                sZ+=k*xB[k]
        if a*b != 0 : return sY/a,sZ/b
```

   La première boucle `for` comptabilise, pour `N` mains aléatoires : dans `a` (resp. `b`) le nombre de celles qui contiennent l'as de pique (resp au moins un as) et au rang n $(0 \leqslant n \leqslant 4)$ de la liste `xA` (resp. `xB`) le nombre de celles contenant n as et appartenant à A (resp. à B).

4. Etude théorique.

   (a) Pour $k=2$, $k=3$ et $k=4$, comparer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A(X=k)$ et $\mathbb{P}_B(X=k)$.

   (b) Comparer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

Solution :

1. Cours : coefficients binomiaux - première année p 16.
2. Ω est l'ensemble des mains, c'est-à-dire des parties à 5 éléments de l'ensemble *jeu* des 32 cartes du paquet.
   Une carte a : . l'une des huit valeurs : 7, 8, 9 ,10, Valet, dame roi, as : ensemble *valeur* ,
   . et une des quatre couleurs trèfle, carreau, cœur, pique : ensemble *couleur*$=\{\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit,\spadesuit\}$.
   L'ensemble *jeu* s'identifie donc à l'ensemble des couples (val, coul), val$\in$ *valeur*, coul$\in$ *couleur*.
   Une main est une partie à 5 éléments de l'ensemble *jeu*.
   Par suite, on pose : $\Omega = \mathcal{P}_5(valeur \times couleur)$
   $A = \{main \in \Omega \,/\, (as,\spadesuit)\in main\}$
   $B = \{main \in \Omega \,/\, \exists\,(x,y)\in main \quad x=as\}$

   (a) Du fait de l'équiprobabilité des tirages, $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.
   A s'identifie à $\{(\mathrm{as},\spadesuit)\}\times\mathrm{C}$, C ensemble des parties à 4 éléments du jeu privé de l'as de pique.
   Donc $\mathrm{Card(A)} = \binom{31}{4}$. Par ailleurs : $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{32}{5} = \dfrac{32}{5}\binom{31}{4}$
   Par conséquent : $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{5}{32}$.

   (b) L'évènement "la main ne contient pas d'as" est l'évènement contraire $\overline{\mathrm{B}}$ de B.
   $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{\frac{28\times27\times26\times25\times24}{5\times4\times3\times2\times1}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1}} = \dfrac{27\times26\times25\times24}{32\times31\times30\times29}$, donc avec l'information de l'énoncé : $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}) < \dfrac{1}{2}$.
   Par suite : $\mathbb{P}(\mathrm{B}) > \dfrac{1}{2}$.
   Il y a plus de chance pour une main aléatoire de contenir un as (au moins) que de ne pas en contenir.

   (c) On a vu : $\mathbb{P}(B) > \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{32}$; d'où : $2.\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{5}{16}$, et par suite : $\mathbb{P}(\mathrm{B}) > 2.\mathbb{P}(\mathrm{A})$.

   (a) Un code possible est :

```
def as_de_pique(m):
    rep=False
    for i in range(5) :
        if m[i]==('as','pique'):
            rep = True
    return(rep)
```

   (b) Un code possible est :

```
def nbre_as (m) :
    nb=0
    for i in range(5) :
        if m[i][0]=='as' :
            nb=nb+1
    return nb
```

   (c) Une possibilité pour le code complété est :

```
import numpy as np

def estimation(N):
    a,b=0,0
    xA,xB=np.zeros(5),np.zeros(5)
    for i in range(N):
        main=ma_main()
        n=nbre_as(main)
        if n != 0 :
            if as_de_pique(main) :
                a+=1
                xA[n]+=1
```

```
            xB[n]+=1
            b+=1
    sY=0 ; sZ=0
    for k in range (1,5) :
        sY+=k*xA[k]
        sZ+=k*xB[k]
    if a*b != 0 : return sY/a,sZ/b
```

Le cas où au cours des N tirages aléatoires, aucune main ne contient l'as de pique, ou même : aucune main ne contient d'as, n'est pas théoriquement impossible. D'où la nécessité de s'assurer avant d'imprimer des quotients par a et par b que a.b est non nul (i.e. que ni a ni b n'est nul).

(d) Par le calcul :

— Comparaison des probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$ pour $k \geqslant 2$:

$\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})}$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$ (définies car $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ non nulles)

. On a déjà comparé les dénominateurs [cf. question 2. (b)] : $\mathbb{P}(\mathrm{B}) > 2.\mathbb{P}(\mathrm{A})$ (1)

. L'équiprobabilité entraine que $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

Pour $\mathrm{k} > 0$, $\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}$ est simplement l'ensemble des mains contenant k as ;

donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dbinom{4}{\mathrm{k}} \times \dbinom{28}{5-\mathrm{k}}$ (k as parmi 4, 5-k autres cartes pami les 28 qui ne sont pas des as)

$\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}$ est l'ensemble des mains contenant k as dont l'as de pique ;

donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) = \dbinom{3}{\mathrm{k}-1} \times \dbinom{28}{5-\mathrm{k}}$ (k-1 as autres que pique, 5-k autres cartes qui ne sont pas des as)

$\dbinom{4}{\mathrm{k}} = \dfrac{4}{\mathrm{k}}\dbinom{3}{\mathrm{k}-1} \Rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})=\dfrac{4}{\mathrm{k}}.\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})$, soit si $\mathrm{k}\geqslant 2$: $\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}) \leqslant 2.\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\})$ (2)

. (1) et (2) montrent que, pour $2 \leqslant k \leqslant 4$: $\mathbb{P}_B(X=k) < \mathbb{P}_A(X=k)$ (3).

— Y comme Z prend les valeurs 1, 2, 3, 4 (toujours au moins un as et au plus quatre).

Il est immédiat que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k) = \mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k)$

On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=1$ implique $\displaystyle\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=1)=1-\sum_{k=2}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=1$ implique $\displaystyle\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=1)=1-\sum_{k=2}^{4}\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$

D'où : $\displaystyle\mathbb{E}(\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{4}k.\mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k) = \mathbb{P}_A(\mathrm{X}=1) + \sum_{k=2}^{4}k.\mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k) = 1+\sum_{k=2}^{4}(k-1).\mathbb{P}_A(\mathrm{X}=k)$

$\displaystyle\mathbb{E}(\mathrm{Z})=\sum_{k=1}^{4}k.\mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k) = \mathbb{P}_B(\mathrm{X}=1) + \sum_{k=2}^{4}k.\mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k) = 1+\sum_{k=2}^{4}(k-1).\mathbb{P}_B(\mathrm{X}=k)$

(3) implique alors : $\mathbb{E}(\mathrm{Z}) < \mathbb{E}(\mathrm{Y})$ $\big($puisque pour $k\geqslant 2$, $k-1 > 0\big)$.

L'espérance du nombre d'as dans la main est plus élevée si on sait que la main contient l'as de pique que si on sait que la main contient au moins un as.

Remarque : X, Y et Z sont définies sur 3 espaces probabilisés différents. Cela n'empêche pas de comparer $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.

Pour les candidats les plus rapides, on pourra éventuellement demander d'écrire le code de la fonction `ma_main()`. Une possibilité est la suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def ma_main():
    main=[]
    i=1
    while i <= 5 :
        val=valeur[rd.randint(0,8)]
        coul=couleur[rd.randint(0,4)]
        if (val,coul) not in main :
```

```
            main+=[(val,coul)]
            i+=1
    return(main)
```

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 8

Etudier le comportement asymptotique, quand t tend vers $+\infty$ des solutions de l'équation différentielle : $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$.

Solution :

On écrit l'équation différentielle sous forme d'un système différentiel.
On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, de sorte que $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} X(t)$.

On détermine les valeurs propres de A en étudiant l'inversibilité de la matrice $A - \lambda I$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$.

Par échange de L_2 et L_3 et en effectuant $L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \\ 0 & 0 & 2+3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres sont donc $0, -1$ et -2. A est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. On obtient $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, car les valeurs propres sont inférieures ou égales à 0.

Question supplémentaire : Utiliser une autre méthode pour répondre à la question.

Soit y une solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. On remarque que y' est solution d'une equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $z''+3z'+2z = 0$. Son équation caractéristique est $r^2+3r+2 = 0$, dont les racines sont -1 et -2. Ainsi, il existe deux constantes réelles a et b telles que $y'(t) = ae^{-t} + be^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient y par calcul de primitive : il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y(t) = ae^{-t} + be^{-2t} + c$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = c$.

SUJET Maths Appliquéees 9

Exercice principal Maths Appliquéees 9

Soit α un nombre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On appelle f_1 le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et f_2 le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Question de cours : critère de diagonalisabilité dune matrice selon les sous espaces propres.
2. (a) Montrer que, quelque soit α, la matrice A_α admet la valeur propre 1.
   (b) On note $E_1(\alpha)$ le sous espace propre de A_α associé à la valeur propre 1. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $E_1(\alpha)$.
3. On note $F = \text{Vect}\ (f_1, f_2)$.
   (a) Montrer que l'image par ϕ_α de tout vecteur de F appartient à F.
   (b) On appelle $\widehat{\phi_\alpha}$ l'endomorphisme de F induit par ϕ_α, c'est à dire vérifiant, pour tout vecteur V de F, $\widehat{\phi_\alpha}(V) = \phi_\alpha(V)$.
   Donner une matrice de $\widehat{\phi_\alpha}$.
4. Montrer que pour tout réel α, $\alpha - 1$ est une valeur propre de A_α et que l'on peut trouver un vecteur f_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α, qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de A_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.
5. Pour quelles valeurs du paramètre α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Question de cours : un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres de f est égale à la dimension de E.
2. (a) On remarque que pour tout réel α, $A_\alpha f_1 = f_1$ (avec $f_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$) donc 1 est valeur propre de ϕ_α.
   (b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   $$u \in E_1 \iff \phi_\alpha(u) = u \iff \left\{ \begin{array}{c} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x - \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + \alpha z = 0 \end{array} \right.$$
   — si $\alpha \neq 0$ alors $\left\{ \begin{array}{c} x = -z \\ (2-\alpha)y + (2-\alpha)z = 0 \\ (\alpha-2)y + (2-\alpha)z = 0 \end{array} \right.$
     — si de plus $\alpha \neq 2$ alors $\left\{ \begin{array}{c} x = -z \\ y = -z \end{array} \right.$ et $E_1(\alpha) = \text{Vect}\,(f_1)$ donc la famille (f_1) est une base de $E_1(\alpha)$.
     — si $\alpha = 2$ alors $x = -z$ et $E_1(2) = \{(x, y, -x), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
     On a bien une base de $E_1(2)$.
   — si $\alpha = 0$ alors $\left\{ \begin{array}{c} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array} \right. \iff x = y$ donc
   $E_1(0) = \{(x, x, z)\ /\ x, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et cette famille libre forme une base de $E_1(0)$.

3. (a) On remarque déjà que (f_1, f_2) est une famille libre, et donc une base de F.
On a déjà constaté que $\phi_\alpha(f_1) = f_1$.
On remarque que $\phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2 \in F$.
Donc pour tout $u = xf_1 + yf_2 \in F$, on a $\phi_\alpha(u) = (x + \alpha y)f_1 + yf_2 \in F$.

(b) La matrice M de $\widehat{\phi_\alpha}$ dans la base (f_1, f_2) est :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $\phi_\alpha(u) = (\alpha - 1)u \Longleftrightarrow (A_\alpha - (\alpha - 1)I)\, U = 0$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 & \\ -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 & L_2 - L_1 \\ 2x + (\alpha - 2)y + 2z = 0 & L_3 + L_1 \end{array} \right. , \Longleftrightarrow (1) \left\{ \begin{array}{c} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ 0 = 0 \\ (2-\alpha)x + (2-\alpha)z = 0 \end{array} \right.$

— si $\alpha \neq 2$: (1) $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ x = -z \end{array} \right.$

— si $\alpha = 2$: (1) $\Longleftrightarrow x + z = 0$

Donc $f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha - 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. — Soient x, y et z réels. Si $xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$ alors $\left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{array} \right.$ d'où $x = -y$ et $z = 0$ et $y = 0$ par substitution. Donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre et de cardinal 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de ϕ_α dans cette base est :
$$N = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

— Si $\alpha = 0$ alors ϕ_α est diagonalisable (diagonalisée sur (f_1, f_2, f_3))
Et si $\alpha \neq 0$, comme N est triangulaire, les seules valeurs propres de ϕ_α sont 1 et $\alpha - 1$. On détermine la dimension de chaque sous espace propre :
  — Si $\alpha = 2$, la seule valeur propre est 1 et le sous espace propre associé $E_1(2)$ est de dimension 2. Donc ϕ_2 n'est pas diagonalisable.
  — Si $\alpha \neq 2$ le sous espace propre associé à 1 est de dimension 1 et celui associé à $(\alpha - 1) \neq 1$ est de dimension 1 également. Donc ϕ_α n'est pas diagonalisable.

Finalement, la seule valeur pour laquelle ϕ_α est diagonalisable est $\alpha = 0$.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu ; dans le cas contraire, il perd 10 euros pour chaque Pile obtenu. La pièce est truquée et, à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à p, avec $p \in]0;1[$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Ecrire le code d'une fonction Python `simule_G(n,p)` qui réalite une simulation du gain du joueur.
2. Déterminer l'espérance de G.
   Comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce pour optimiser sa rentabilité ?
3. Le concepteur du jeu décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. Il pense pouvoir compter sur la participation de 200 joueurs dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque derreur inférieur à 10% , quil gagnera plus de 100 euros dans la journée. Installera-t-il son stand ?

Solution :

1. Une possibilité est le code suivant :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simule_G(n,p):
    X=rd.binomial(n,p)
    return 10*X*(-1)**X
```

2. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $G = 10X(-1)^X$. D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (-p)^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10\sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^{k+1}(1-p)^{n-k} \\
&= -10np(1-2p)^{n-1}
\end{aligned}$$

   On étudie la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]0;\frac{1}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -10nx(1-2x)^{n-1} \end{array}$

   Pour $n \geqslant 2$, f est dérivable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) = 10n(1-2x)^{n-2}(2nx-1)$. f admet donc un minimum en $\frac{1}{2n}$ donc le gain moyen du joueur est minimal lorsque $p = \frac{1}{2n}$.

3. Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on appelle G_i la variable aléatoire égale au gain du i-ème joueur de la journée. Avec $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$, la loi de probabilité de G_i est donnée par :

$$P(G_i = 20) = p^2 = \frac{1}{16} \; P(G_i = 0) = (1-p)^2 = \frac{9}{16} \; P(G_i = -10) = \frac{3}{8}$$

On a alors : $E(G_i) = 20 \times \dfrac{1}{16} - 10 \times \dfrac{3}{8} = -\dfrac{5}{2}$.
$V(G_i) = E(G_i^2) - E(G_i)^2 = 400 \times \dfrac{1}{16} + 100 \times \dfrac{3}{8} - \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{225}{4}$

Soit H la variable aléatoire égale au gain du concepteur du jeu. $H = -\sum_{i=1}^{200} G_i$ donc par linéarité de l'espérance, $E(H) = -200 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) = 500$.
Par indépendance des variables G_i, $V(H) = 200 \times V(-G_i) = 200 \times V(G_i) = 200 \times \dfrac{225}{4}$.
On remarque que $P(H > 100) \leqslant P(|H - 500| > 400)$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, H possédant un moment d'ordre 2 :

$$P(H > 100) \leqslant P(|H - E(H)| > 400) \leqslant \frac{V(H)}{400^2} = \frac{200 \times \frac{225}{4}}{160000} = \frac{9}{128} < \frac{10}{100}$$

Le concepteur du jeu peut bien installer son stand.

SUJET Maths Appliquées 10

Exercice principal Maths Appliquées 10

Une urne contient $n \geqslant 2$ boules distinctes $B_1, B_2, \ldots, B_n$, que l'on tire successivement et avec remise. Pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on note Y_r la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. Cours : quel est le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble de n éléments ?
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_1.
3. Écrire une fonction en Python prenant en argument deux entiers n et r (on supposera $1 \leqslant r \leqslant n$, sans le vérifier) et qui simule une réalisation de la variable Y_r.
4. Préciser l'univers-image de Y_r. Calculer $\mathbb{P}(Y_r = r)$.
5. Montrer que l'événement A_r : « on tire les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ lors des r premiers tirages sans jamais tirer les boules $B_{r+1}, \ldots, B_n$, et on tire la boule B_r au $(r+1)$-ème tirage » a pour probabilité :
$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{\binom{r}{2}(r-1)!}{n^{r+1}}.$$
6. En déduire que :
$$\mathbb{P}(Y_r = r+1) = \frac{r(n-r)r! + \binom{r}{2}r!}{n^{r+1}}.$$
7. On fixe r. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1,\ B_2, \ldots, B_r$ soient sorties. On pose $X_1 = W_1$ et, pour tout $i \geqslant X_i = W_i W_{i-1}$ si $i \geqslant 2$.
   (a) Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.
   (b) En déduire l'espérance de Y_n.
   (c) Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Cf. programme de première année, page 22.
2. Y_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$. On a alors : $\mathbb{E}(Y_1) = n$ et $\mathbb{V}(Y_1) = n^2 - n$.
3.
```python
import numpy.random as rd

def simule_Y(n,r):
    B = [0]*n
    rang = 0
    while sum(B[:r]) < r:
        rang += 1
        boule = rd.randint(0,n)
        if B[boule] == 0:
            B[boule] = 1
        # print(rang, B, boule)
    return rang
```
4. On trouve immédiatement que $Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$.

   Par équiprobabilité des tirages, on trouve que $\mathbb{P}(Y_r = r) = \dfrac{r!}{n^r}$.

5. Par équiprobabilité, on est ramené à calculer le cardinal de l'événement A_r. Or réaliser l'événement A_r revient à choisir :
   — le numéro i de boule tirée deux fois (il y a $r-1$ choix)
   — les deux rangs de tirage de la boule B_i (il y a $\binom{r}{2}$ choix)
   — le rang des boules B_k ($1 \leqslant k \leqslant r-1$ et $k \neq i$) (il y a $(r-2)!$ choix).
   Par équiprobabilité, on trouve que :
$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{(r-1)\binom{r}{2}(r-2)!}{n^{r+1}} = \frac{\binom{r}{2}(r-1)!}{n^{r+1}}$$
6. Réaliser l'événement C_r : « on tire une seule fois les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ lors des r premiers tirages et on tire la boule B_r au $(r+1)$-ème tirage » revient à choisir :
   — le numéro i de boule tirée parmi les boules $B_{r+1}, \ldots, B_n$ (il y a $n-r$ choix)
   — le rang des boules $B_1, \ldots, B_{r-1}, B_i$ (il y a $r!$ choix).
   Ainsi $\mathbb{P}(C_r) = \dfrac{(n-r)r!}{n^{r+1}}$.
   En remarquant qu'on peut écrire l'événement $[Y_r = r+1]$ comme la réunion disjointe de r événements de même probabilité, égale à $\mathbb{P}(A_r \cup B_r)$, on trouve que
$$\mathbb{P}(Y_r) = r(\mathbb{P}(A_r) + \mathbb{P}(C_r)) = r\frac{(n-r)r! + \binom{r}{2}(r-1)!}{n^{r+1}} = \frac{r(n-r)r! + \binom{r}{2}r!}{n^{r+1}}$$
7. (a) La variable aléatoire X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{r-(i-1)}{n}$.
   Elle admet pour espérance $\dfrac{n}{r-i+1}$.

   (b) On se trouve dans le cas où $r = n$. Par linéarité, la variable
$$Y_n = W_1 + \sum_{k=2}^{n} W_k - W_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
   admet une espérance égale à :
$$\mathbb{E}(Y_n) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   (c) On peut montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{n}$$
   On en déduit que :
$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$
   et ainsi que $\mathbb{E}(Y_n) \sim n \ln n$.

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 10

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \ell$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

1. Etudier la convergence de la suite (u_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \frac{1}{1-u_n}$.
   (a) Déterminer un équivalent de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution :

1. — $u_0 = 0; u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{5}{8}; u_3 = \frac{89}{128}$.
   On montre par récurrence que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}, 0 \leqslant u_n < 1$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
   — La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge. D'après un théorème de point fixe, sa limite vérifie $l = \frac{l^2+1}{2} \Leftrightarrow l = 1$
2. (a) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{u_n^2+1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{1}{1+u_n} \end{aligned}$$

   Donc $\lim_{n\to+\infty}(w_{n+1} - w_n) = \frac{1}{2}$.

   D'après la propriété donnée dans l'énoncé, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = \frac{1}{2}$

   Or $\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = w_n - w_0 = w_n - 1$

   Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}w_n = \frac{1}{2}$, d'où $w_n \sim \frac{n}{2}$.

   (b) Lorsque n tend vers $+\infty$, on a donc :
   $u_n = 1 - \frac{1}{w_n} = 1 - \frac{1}{\frac{n}{2}+o(n)} = 1 - \frac{2}{n} \times \frac{1}{1+o(1)} = 1 - \frac{2}{n}(1+o(1)) = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

SUJET Maths Appliquéees 11

Exercice principal Maths Appliquéees 11

Soit $p \in]0,1[$. Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant
— ou bien une seule marche, avec probabilité p,
— ou bien deux marches, avec probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. **Cours :** Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance
   — d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$,
   — d'une variable aléatoire Y fonction affine de X, c'est-à-dire $Y = aX + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée un entier n et la probabilité p et renvoie une simulation de la variable aléatoire Z_n.
3. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté d'une marche, et Y_n le nombre de marches franchies.
   (a) Justifier la loi suivie par la variable X_n.
   (b) Exprimer Y_n en fonction de X_n et en déduire l'espérance et la variance de Y_n.
4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Donner les valeurs de p_1, p_2 puis établir une formule de récurrence reliant p_k et p_{k-1} pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
5. En déduire la valeur de p_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

1. **Cours.**
2.
```python
import numpy.random as rd

def Z(n,p):
        k = 0
        compteur = 0
        while k < n:
                compteur = compteur + 1
                if rd.random() < p:
                        k = k+1
                else :
                        k = k+2
        return compteur
```
3. (a) La variable aléatoire X_n compte le nombre de succès "faire un saut d'une marche" de probabilité p lors de la répétition de n expériences de Bernoulli "Effectuer un saut" réalisées de manière indépendante. On reconnait : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   (b) $Y_n = 1 \times X_n + (n - X_n) \times 2$ puisque la grenouille effectue X_n sauts d'une marche et $n - X_n$ sauts de deux marches. Ainsi : $Y_n = 2n - X_n$.
   Par linéarité de l'espérance : $E(Y_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np = n(2-p)$.
   Par propriété de la variance : $V(Y_n) = (-1)^2 V(X_n) = np(1-p)$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note U_k l'événement "Sauter d'une marche au k-ième saut" et D_k l'événement "Sauter de deux marches au k-ième saut".
   On a alors : $p_1 = P(U_1) = p$ et $p_2 = P((U_1 \cap U_2) \cup D_1)$. Par incompatibilité des événements :
   $p_2 = P(U_1 \cap U_2) + P(D_1)$, et comme les sauts sont indépendants : $p_2 = p^2 + (1-p) = p^2 - p + 1$.

Puis, pour tout entier $k \geqslant 2$, on définit l'événement M_k : "La grenouille passe par la marche k". Il existe un entier n_0 tel que : $\overline{M_k} = M_{k-1} \cap D_{n_0}$. Par indépendance des sauts :

$$\forall k \geqslant 2, \quad p_k = P(M_k) = 1 - P(\overline{M_k}) = 1 - p_{k-1}(1-p).$$

5. Vu la question précédente, on reconnait que $(p_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u_k = p_k - \dfrac{1}{2-p}$ de sorte que $(u_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $p-1$ et de premier terme : $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{2-p} = p - \dfrac{1}{2-p} = \dfrac{2p - p^2 - 1}{2-p}$.
   Ainsi :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = (p-1)^{k-1} \frac{2p - p^2 - 1}{2-p} + \frac{1}{2-p}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquéees 11

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). On note alors $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$).
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est productive si M est positive et s'il existe un vecteur $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ strictement positif tel que $P - MP$ soit strictement positif.
Dans tout cet exercice, A désigne une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose ici que si $X - AX \geqslant 0$, alors $X \geqslant 0$. Montrer que $(I_n - A)$ est inversible.
   Que peut-on dire de $(I_n - A)^{-1}$?
2. Montrer que si $X - AX \geqslant 0$, alors $X \geqslant 0$.
   En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ un vecteur strictement positif tel que $P - AP$ soit strictement positif, on pourra introduire $c = \min\left\{\dfrac{x_j}{p_j}, 1 \leqslant j \leqslant n\right\} = \dfrac{x_k}{p_k}$.

Solution :

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AX$. Alors $X - AX = 0$, donc $X - AX \geqslant 0$ et $X - AX \leqslant 0$ soit $(-X) - A(-X) \geqslant 0$.
   D'après l'hypothèse, on en déduit que X et $(-X)$ sont des matrices positives. Donc X est nulle.
   $(I_n - A)X = 0 \Rightarrow X = 0$ donc $(I_n - A)$ est inversible.

   — Soit $X \geqslant 0$, on pose $Y = (I_n - A)^{-1}X$. On a alors $(I_n - A)Y = X \geqslant 0$ donc $Y \geqslant 0$ par hypothèse, et ainsi pour tout $X \geqslant 0$, $(I_n - A)^{-1}X \geqslant 0$. On appelle alors X_k le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la k-ième qui vaut 1. Chaque X_k est positif donc les produits $(I_n - A)^{-1}X_k$ nous permettent de montrer que la matrice $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
   — A est productive donc il existe un vecteur $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ strictement positif tel que $U = P - AP$ soit strictement positif. On a alors $(I_n - A)^{-1}U = P > 0$ donc $(I_n - A)^{-1}$ est productive.

2. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

   $X - AX \geqslant 0$ donc pour tout i compris entre 1 et n, $x_i - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x_j \geqslant 0$.

   En particulier : $0 \leqslant x_k - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}x_j \Leftrightarrow 0 \leqslant x_k - \sum_{j=0}^{n} a_{k,j}\frac{x_j}{p_j}p_j$

   Or pour tout j compris entre 1 et n, $\dfrac{x_j}{p_j} \geqslant \dfrac{x_k}{p_k}$ et $p_j > 0$ donc $\dfrac{x_j}{p_j}p_j \geqslant \dfrac{x_k}{p_k}p_j$.

   En sommant : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}\frac{x_j}{p_j}p_j \geqslant \frac{x_k}{p_k}\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}p_j$ donc $0 \leqslant x_k - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}x_j \leqslant cp_k - c\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j = c\left(p_k - \sum_{j=0}^{n} a_{k,j}p_j\right)$

   or $\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}p_j\right) > 0$ donc $c \geqslant 0$.

   Ceci prouve bien que $X \geqslant 0$.