2

ALGÈBRE

Exercice 2-1

Soit $\mathcal{E}$ une base de $\mathbb{C}^2$, et u un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ tel que la matrice associée à u dans $\mathcal{E}$ soit

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer l'équation du second degré que doivent vérifier les valeurs propres de U.

2. En déduire que $a + d$ et $ad - bc$ ne dépendent pas de la base $\mathcal{E}$, mais uniquement de l'endomorphisme u.

3. Calculer $U^2 - (a + d)U + (ad - bc)I_2$, où I_2 représente la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. On suppose que $a + d \neq 0$. Montrer que si U^2 est diagonalisable, alors U l'est également. Ce résultat est-il encore vrai si $a + d = 0$?

Solution :

1. $U - \lambda I$ est non-inversible si et seulement si $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$, c'est-à-dire si et seulement si : $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$.

2. On sait que les valeurs propres de u sont les valeurs propres de n'importe quelle matrice associée, donc le choix d'une base est sans influence sur les racines de l'équation du second degré obtenue, donc sans influence sur ses coefficients. C'est le résultat demandé.

3. On trouve sans difficultés : $U^2 - (a + d)U + (ad - bc)I_2 = 0$, où 0 désigne la matrice nulle, carrée d'ordre 2.

4. Si $a+d\neq 0$, on déduit du calcul précédent : $U=\dfrac{ad-bc}{a+d}\,I_2+\dfrac{1}{a+d}\,U^2$.
Si U^2 est diagonalisable et si P est une matrice de passage diagonalisante pour U^2, la relation précédente montre que $P^{-1}UP$ est aussi diagonale, donc U est diagonalisable.

En revanche, si $a+d=0$, on peut prendre $U=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $U^2=0$ est diagonalisable, tandis que U est non nulle et admet 0 pour unique valeur propre, donc n'est pas diagonalisable.

Exercice 2-2

On désigne par Φ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$(\forall\, P\in\mathbb{R}[X])\qquad \Phi(P)=(X^2-1)\,P''+(2X+1)\,P'$$

Soit n un entier naturel non nul et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. a) Vérifier que la restriction de Φ à E_n est un endomorphisme de E_n, noté Φ_n.

b) Exprimer la matrice de Φ_n dans la base canonique $\big(1,X,X^2,\dots,X^n\big)$ de E_n.

c) Déterminer les valeurs propres de Φ_n. L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?

d) Montrer que, pour tout entier $k\in[\![0,n]\!]$, il existe un unique polynôme H_k de degré k et de coefficient dominant égal à 1, qui est vecteur propre de Φ_n.

2. a) Justifier (brièvement) que :

$$(P\mid Q)=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,P(x)\,Q(x)dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En observant que :

$$(x^2-1)\,P''(x)+2x\,P'(x)=\frac{d}{dx}\big[(x^2-1)\,P'(x)\big]$$

montrer que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\big(\Phi(P)\mid Q\big)=\int_{-1}^{1}(1-x)^{3/2}\,(1+x)^{1/2}\,P'(x)\,Q'(x)dx$$

c) En déduire que la famille $(H_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthogonale de E_n.

Solution :

1. a) La linéarité de la dérivation montre que Φ est une application linéaire. Si P est un polynôme de degré $p \leq n$, on peut écrire $P(X) = a_p X^p + Q(x)$ et $\Phi(P)(X) = p(p+1)a_p X^p + R(X)$, ce qui montre que Φ restreint à E_n est un endomorphisme de E_n.

b) Le calcul donne, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\Phi_n(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

c) La matrice A_n est triangulaire supérieure, les valeurs propres de Φ_n sont ses éléments diagonaux, soit :

$$\mathrm{Spec}(A) = \{k(k+1), 0 \leq k \leq n\}$$

Enfin Φ_n est un endomorphisme de E_n, espace vectoriel de dimension $(n+1)$ qui admet $(n+1)$ valeurs propres distinctes. Ainsi Φ_n est diagonalisable.

d) Les sous-espaces propres sont de dimension 1.
Soit H_k l'unique vecteur propre de coefficient dominant associé à la valeur propre $\lambda_k = k(k+1)$. On a $H_k(X) = X^p + Q(X)$ et $\Phi_n(H_k) = p(p+1)X^p + R(X)$.
Mais $\Phi_n(H_k) = k(k+1)H_k$, d'où $\Phi_n(H_k) = k(k+1)X^p + R_1(X)$, ce qui entraîne que $p = k$.

2. a) Montrons déjà que l'intégrale proposée est une intégrale convergente :
La fonction $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, P(x)Q(x)$ est continue sur $]-1, 1]$. Démontrons la convergence en $x = -1$.

- si $P(-1)Q(-1) \neq 0$, alors, au voisinage de -1, $h(x) \sim \dfrac{C}{\sqrt{1+x}}$ qui est intégrable par le critère de Riemann.
- si $P(-1)Q(-1) = 0$, on peut écrire $P(X)Q(X) = (x+1)^k R(X)$ et h admet un prolongement par continuité en $x = -1$.

On vérifie aisément que $(\ ,\ )$ est bilinéaire, symétrique, positive.

Enfin, si $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, P^2(x)\, dx = 0$, par continuité et positivité, on a, pour tout x de $]-1, 1]$, $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, P^2(x) = 0$ et P admettant une infinité de racines sur $]-1, 1[$ est le polynôme nul.

b) Une intégration par parties sur $[a,b] \subset]-1,1[$ donne :

$$\int_a^b \big((x^2-1)P''(x)+2xP'(x)\big)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q(x)\,dx = \Big[(x^2-1)P'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q(x)\Big]_a^b$$
$$-\int_a^b (x^2-1)P'(x)\Big[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q'x) - \frac{Q(x)}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}\Big]\,dx$$

d'où en faisant passer le dernier terme dans la partie gauche :

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Phi(P)(x)Q(x)\,dx = \Big[(x^2-1)P'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q(x)\Big]_a^b$$
$$+\int_a^b (1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}P'(x)Q'(x)\,dx$$

Il reste à faire tendre a vers -1 et b vers 1 pour obtenir :

$$(\Phi(P) \mid Q) = \int_{-1}^1 (1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}P'(x)Q'(x)\,dx$$

c) L'expression que l'on vient d'obtenir étant symétrique, il s'ensuit :

$$(\Phi(P) \mid Q) = (P \mid \Phi(Q))$$

Les valeurs propres λ_k étant deux à deux distinctes, on a pour $k \neq j$:

$$\begin{aligned}(\Phi(H_j) \mid H_k) = (H_j \mid \Phi(H_k)) &\Longleftrightarrow \lambda_j(H_j \mid H_k) = \lambda_k(H_k \mid H_j)\\ &\Longrightarrow \ (H_k \mid H_j) = 0\end{aligned}$$

Exercice 2-3

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$, à coefficients réels.

Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note par ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle u \mid v \rangle = u_1v_1 + \cdots + u_pv_p.$$

Si $u \in \mathbb{R}^p$, on note $\|u\|$ la norme euclidienne du vecteur u .

1. a) Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives. On notera c sa plus grande valeur propre.

b) Montrer que $\|Ax\|^2 \leqslant c\,\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. En déduire que pour tout couple de vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ et pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(*) \qquad \left|\langle A^k x \mid y\rangle\right| \leqslant c^{\frac{k}{2}}\,\|x\|\,\|y\|$$

On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si chaque coefficient de U_n converge, lorsque n tend vers l'infini, vers le coefficient correspondant de la matrice U. On note ε_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

2. a) Soient $(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2$. En utilisant la relation $(*)$, montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}$ est convergente.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la matrice B_n par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

Montrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une matrice que l'on notera $\exp(A)$.

c) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors e^λ est une valeur propre de $\exp(A)$.

d) Calculer $\exp(A)$ lorsque A est une matrice diagonale.

Solution :

1. a) La matrice ${}^tAA$ est symétrique puisque $({}^tAA)^t = {}^tAA$. Elle est réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On peut écrire :

$${}^tAAX = \lambda X \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = \lambda{}^tXX \Leftrightarrow ||AX||^2 = \lambda||X||^2$$

ce qui entraîne que $\lambda \geq 0$.

b) Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$. Tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et ${}^tAAx = \sum_{i=1}^{p} x_i\lambda_i e_i$, avec pour tout $1 \leq i \leq p, 0 \leq \lambda_i \leq c$. Alors :

$$||Ax||^2 = {}^tX{}^tAAX = \sum_i\sum_j \lambda_i x_i x_j {}^te_i e_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^2$$

et

$$||Ax||^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^2 \leq c\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = c||x||^2$$

Une récurrence évidente montre que pour tout $k \in \mathbb{N}, ||A^kx||^2 \leq c^k||x||^2$.
Soit alors x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Il vient, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle A^kx, y\rangle|^2 \leq ||A^kx||^2||y||^2 \leq c^k||x||^2||y||^2$$

2. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

a) On a par la question précédente : $\left|\dfrac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}\right| \leq \dfrac{c^{k/2}}{k!}||x||\,||y||$, qui est le terme général d'une série convergente. La série proposée est donc absolument convergente.

b) On définit $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ et pour tout $1 \leq i,j \leq n$, $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}$, ainsi que $b_{n,i,j} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}$. La convergence des séries écrites montre que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_{n,i,j} = b_{i,j}$.

c) Si $Ax = \lambda x$, alors pour tout $n \geq 0$:

$$B_n x = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k x}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k x}{k!} = x \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Cette dernière somme converge vers e^{λ}, tandis que (B_n) converge vers e^{A}.

d) Si B est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, la définition de $\exp(B)$ et un calcul immédiat donnent :

$$\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \mathrm{e}^{\lambda_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$$

Exercice 2-4

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$ à coefficients réels. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. a) Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(AB) \\ \mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A) \end{cases}$$

b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un réel non nul.

a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

b) On suppose dans cette question que λ n'est pas valeur propre de la matrice AB. Montrer que l'on a alors :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B$$

c) Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

3. On considère les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice BA.

b) Calculer, après avoir justifié son existence, l'inverse de la matrice $I-AB$.

Solution :

1. a) Si $Bx=0$, alors $ABx=0$. De même tout vecteur ABx s'écrit $A(Bx)$.

b) Si la matrice AB est inversible, il vient $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker}(AB)=\{0\}$, ce qui entraîne que B est inversible. De même $\mathbb{R}^p=\operatorname{Im}(AB)\subseteq \operatorname{Im}(A)$ entraîne que A est inversible.

2. Supposons la matrice $\lambda I - AB$ inversible. Soit $x\in \operatorname{Ker}(\lambda I - BA)$.
Alors $BAx=\lambda x \implies ABAx=\lambda Ax$, ce qui donne :
$Ax\in\operatorname{Ker}(\lambda I-AB)=\{0\}$. Donc $Ax=0$ et $0=BAx=\lambda x$ entraîne que $\lambda x=0$. Enfin $\lambda\neq 0$ entraîne que $x=0$.
Les matrices AB et BA jouant des rôles symétriques, on obtient la réciproque demandée.

b) Posons $X=\dfrac{I}{\lambda}+\dfrac{A}{\lambda}(\lambda I-BA)^{-1}B$. Il vient :

$$\begin{aligned}(\lambda I-AB)X &= \frac{\lambda I-AB}{\lambda}+\frac{\lambda A-ABA}{\lambda}\,(\lambda I-BA)^{-1}\,B\\ &= \frac{\lambda I-AB}{\lambda}+\frac{A(\lambda I-BA)}{\lambda}\,(\lambda I-BA)^{-1}\,B\\ &= \frac{\lambda I-AB}{\lambda}+\frac{AB}{\lambda}=I\end{aligned}$$

c) La question 2.a) montre que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. La question 1.b) montre que 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.

3. a) En effectuant le produit BA, on trouve :

$$BA=\begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

On en déduit que les valeurs propres de BA sont 0 et p.

b) Le réel 1 n'étant pas valeur propre de BA, il n'est pas valeur propre de AB, d'où l'existence de $(I-AB)^{-1}$. Pour calculer cette matrice, on utilise la question 2.b), qui donne :

$$(I-AB)^{-1}=\frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} (2-p) & 1 & \dots & 1\\ 1 & (2-p) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & (2-p)\end{pmatrix}$$

Exercice 2-5

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $H = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots n\}^2,\ a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

1. Montrer que H est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $q(X) = {}^tXHX$.

a) Vérifier que $q(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que les valeurs propres de H sont strictement positives et que H est inversible.

c) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXH^{-1}X \geq 0$, et que ${}^tXH^{-1}X = 0$ si et seulement si $X = 0$.

3. On note $||X|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, a_n la plus petite valeur propre de H et b_n la plus grande valeur propre de H.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ a_n||X||^2 \leq q(X) \leq b_n||X||^2$.

b) On note $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à H et on admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$. Montrer que $na_n \leq \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{k,k}$.

c) On considère la suite (h_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite $(h_n - \ln n)$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solution :

1. La commutativité de l'addition dans $\mathbb{N}$ donne que H est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

2. a) On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 dt &= \int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}\right)dt\\ &= \int_0^1\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2}\right)dt\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2}dt\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_i x_j = {}^tXHX\end{aligned}$$

b) Soit λ une valeur propre de H. Il existe un vecteur X non nul tel que $HX = \lambda X$. Ainsi :

$$q(X) = {}^tXHX = {}^tX(\lambda X) = \lambda||X||^2$$

et $q(X) \geq 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, entraîne que $\lambda \geq 0$.

Or si $\lambda = 0$, il vient $q(X) = 0$. Mais $q(X) = \displaystyle\int_0^1 \big(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\big)^2 dt = 0$ entraîne que le polynôme $\big(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\big)^2$ est identiquement nul sur $\mathbb{R}$ et donc que $X = 0$.

Ainsi H ne possède que des valeurs propres strictement positives ce qui entraîne qu'elle est inversible.

c) Posons $Y = H^{-1}X$. Alors :

$${}^tXH^{-1}X = {}^tY{}^tHH^{-1}HY = {}^tY{}^tHY = {}^tYHY \geq 0$$

et si ${}^tYHY = 0$, alors $Y = 0$ et donc $X = 0$.

3. On sait que H est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots e_n)$. Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $||X||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$, et $HX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$.

On sait de plus que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 < a_n \leq \lambda_i \leq b_n$. Finalement ${}^tXHX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et :

$$a_n||X||^2 \leq \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq b_n||X||^2$$

b) Si l'on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à H, on admet que $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} = s_n$ On a alors, par la question précédente $na_n \leq s_n \leq nb_n$.

c) Posons $u_n = h_n - \ln n$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\big(\frac{n}{n+1}\big) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\big(1 - \frac{1}{n+1}\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + O\Big(\frac{1}{2(n+1)^2}\Big) \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} + O\Big(\frac{1}{2(n+1)^2}\Big) \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, le série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente ce qui siginifie que

$$u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

admet une limite lorsque n tend vers l'infini, donc que la suite (u_n) converge.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} s_n &= h_{2n} - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) = h_{2n} - \frac{1}{2}h_n \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - \frac{1}{2}(u_n + \ln(n)) = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln n \end{aligned}$$

Or $0 \leq a_n \leq \dfrac{s_n}{n}$ donne :

$$0 \leq a_n \leq \frac{u_{2n} - \frac{1}{2}u_n + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln n}{n}$$

soit, par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Exercice 2-6

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et f, g, h trois endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g = h, \ \ g \circ h = f, \ \ h \circ f = g$$

1.a) Comparer les images de ces trois endomorphismes ainsi que leurs noyaux.

b) Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$ et, en calculant $h^2 \circ f \circ h^2$, montrer que $f^5 = f$.

c) Montrer que les noyaux des puissances de f sont tous égaux et en déduire que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

2. On suppose maintenant que f, g, h sont de rang n.

a) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

Montrer que les sous-espaces propres de f (s'il y en a) sont stables par g et par h.

On suppose désormais que f est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que $f^2 = I_E$ (l'endomorphisme identité de E) et que f, g, h commutent deux à deux.

c) En déduire que f, g, h admettent une base commune de vecteurs propres.

Solution :

1. a) Comme $f = g \circ h$, pour tout $x \in E : f(x) = g(h(x))$. Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$
Comme $h = f \circ g$, pour tout $x \in E : h(x) = f(g(x))$. Donc $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$
Comme $g = h \circ f$, pour tout $x \in E : g(x) = h(f(x))$. Donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} h$
On obtient ainsi :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} h$$

De même $h = f \circ g \Rightarrow \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} h$.
$f = g \circ h \Rightarrow \operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} f$ et $g = h \circ f \Rightarrow \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. Ce qui donne

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} h$$

b) Il vient $f^2 = f \circ f = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h \circ h = h^2$, et
$g^2 = g \circ g = g \circ (h \circ f) = (g \circ h) \circ f = f \circ f = f^2$.
Enfin
$f^5 = h^2 \circ f \circ h^2 = h \circ (h \circ f) \circ h^2 = h \circ g \circ h^2 = h \circ (g \circ h) \circ h = h \circ f \circ h = g \circ h = f$

c) On sait que :

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker} f^5 = \operatorname{Ker} f$$

Ainsi :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 = \ldots = \operatorname{Ker} f^5$$

Mais $f^5 = f \Rightarrow \operatorname{Ker} f^{1+4p} = \operatorname{Ker} f$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite des noyaux de f est constante.

Le théorème du rang dit qu'il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ pour montrer que ces deux sous–espaces sont supplémentaires.

Or si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, alors $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = f(y) \end{cases}$.

Mais alors $f^2(y) = 0 \implies y \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \implies x = f(y) = 0$.

2. a) Les valeurs propres de f font partie de l'ensemble des racines du polynôme $X^5 - X$, polynôme annulateur de f. Mais f étant un isomorphisme (rang de f égal n), elles sont incluses dans les racines de $X^4 - 1$, qui sont $\{1, -1, i, -i\}$. Les seules valeurs propres réelles possibles sont donc 1 et -1.

Soit $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors

$$g(x) = h(f(x)) = \lambda h(x) = \lambda f(g(x))$$

Or comme $\dfrac{1}{\lambda} = \lambda$, il vient $f(g(x)) = \lambda g(x)$, ce qui signifie que le sous-espace propre de$f$ associé à la valeur prope λ est stable par g. La démonstration pour h est identique.

b) Si f est de plus symétrique, on sait qu'il est diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs popres sont réelles. Les valeurs propres étant incluses dans $\{-1, 1\}$, la matrice associée à f dans la base des vecteurs propres est diagonale avec ces valeurs sur la diagonale. Donc $f^2 = I$.
Par la question 1.b) on a $I = f^2 = g^2 = h^2$. Donc :
$g \circ f = g \circ g \circ h = g^2 \circ h = h = f \circ g$,
$f \circ h = f \circ f \circ g = f^2 \circ g = g = h \circ f$,
$h \circ g = h \circ h \circ f = h^2 \circ f = f = g \circ h$.

c) Les endomorphismes g et h sont diagonalisables, car $g^2 = I = h^2$.
Comme f est diagonalisable, On sait que $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$. Comme g laisse stable E_1 (resp. E_{-1}), alors g_1 (resp. g_{-1}), restriction de g à E_1, (resp. E_{-1}) est un endomorphisme de E_1 (resp. E_{-1}) et g et g_{-1} sont eux même diagonalisables (ils verifient la même équation que g).

Si l'on note $\mathcal{B}_1$ une base de diagonalisation de g_1 et $\mathcal{B}_{-1}$ une base de diagonalisation de g_{-1}, l'« union » de ces deux bases est une base de E, formée de vecteurs propres de g et de f par construction.

La démonstration pour h est identique.

Exercice 2-7

Soit a un réel strictement positif et E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, a]$. On considère les fonctions s et c de E définies pour tout $x \in [0, a]$ par $s(x) = \sin(x)$ et $c(x) = \cos(x)$. On définit en outre l'application Φ de E dans E par :

$$\forall (x, f) \in [0, a] \times E,\ \Phi(f)(x) = \int_0^a f(t) \sin(x + t) dt$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $(\Phi(s), \Phi(c))$ est un système libre de E.

3. Déterminer Im Φ.

4. On suppose désormais que $a = \pi/2$. Déterminer les valeurs propres non nulles de Φ ainsi que les sous-espaces propres associés.

5. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par s et c. Montrer que la restriction de Φ à F est un endomorphisme de F. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application $(x, t) \mapsto f(t) \sin(x + t)$ est continue sur $[0, a]^2$. Par suite la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $[0, a$. La linéarité est immédiate et provient de la linéarité de l'intégrale.

2. On a pour tout $x \in [0,a]$:

$$\Phi(f)(x) = \sin x \int_0^a f(t)\cos t\,dt + \cos x \int_0^a f(t)\sin t\,dt = \lambda(f)s + \mu(f)c$$

Donc :

$$\Phi(s) = s\int_0^a \sin t\cos t\,dt + c\int_0^a \sin^2 t\,dt,\ \Phi(c) = s\int_0^a \cos^2 t\,dt + c\int_0^a \sin t\cos t\,dt$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \Phi(s) \\ \Phi(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^a \sin t\cos t\,dt & \displaystyle\int_0^a \sin^2 t\,dt \\ \displaystyle\int_0^a \cos^2 t\,dt & \displaystyle\int_0^a \sin t\cos t\,dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible car par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\left(\int_0^a \sin t\cos t\,dt\right)^2 - \left(\int_0^a \sin^2 t\,dt\right)\left(\int_0^a \cos^2 t\,dt\right) < 0$$

ce qui entraîne que $(\Phi(s), \Phi(c))$ est un système libre puisque (s,c) l'est.

3. On sait déjà que $\mathrm{Im}\,\phi \subset \mathrm{Vect}(s,c)$. D'après la question précédente, on peut écrire que $\mathrm{Vect}(s,c) = \mathrm{Vect}(\Phi(s), \Phi(c))$. Donc

$$\mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{Vect}(\Phi(s), \Phi(c)) = \mathrm{Vect}(s,c)$$

4. Soit λ une valeur propre non nulle de Φ et f un vecteur propre associé. Comme $f = \dfrac{\Phi(f)}{\lambda}$, on a $f \in \mathrm{Vect}(s,c)$, soit $f(x) = a\cos x + b\sin x$. On calcule alors $\Phi(f)$ et on obtient :

$$\left(\frac{a\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)\sin x + \left(\frac{a}{2} + \frac{b\pi}{4}\right)\cos x = \lambda(a\cos x + b\sin x)$$

soit :

$$\begin{cases} a(1/2-\lambda) + b\pi/4 = 0 \\ a\pi/4 + b(1/2-\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1/2 + \pi/4 \\ \lambda_2 = 1/2 - \pi/4 \end{cases}$$

Chaque sous–espace propre associé est de dimension 1 et :

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}(c+s), \quad E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}(c-s)$$

5. On a vu que $\Phi(s)$ et $\Phi(c)$ s'exprimaient en fonction de s et c et engendraient le même sous–espace. On en déduit que $\Phi|_F$ est un endomorphisme, même un isomorphisme de F. Cet endomorphisme admet deux valeurs propres distinctes (λ_1, λ_2) car les vecteurs propres associés sont dans F. Ainsi il est diagonalisable.

Exercice 2-8

Soit E l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, $(n \geq 2)$ formé des matrices $A = (a_{i,j})$ vérifiant :

il existe un réel unique noté $m(A)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = m(A)$$

On considère en outre la matrice $J = (j_{p,q})$ de E définie par :

pour tout $(p,q) \in \{1,\ldots,n\}^2, j_{p,q} = 1$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $A.J$ et $J.A$ pour $A \in E$. En déduire que E est stable par la multiplication des matrices et que l'application $m : A \mapsto m(A)$ est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$.

2. Soit G la droite vectorielle engendrée par J et soit $H = \operatorname{Ker} m$ le noyau de m. Montrer que $E = G \oplus H$. (on pourra considérer la matrice $A - \left(\dfrac{m(A)}{n}\right) J$, pour $A \in E$).

3. Pour tout couple $(k,l) \in \{2,\ldots,n\}^2$, on considère la matrice $H^{k,l}$ dont tous les éléments sont nuls exceptés :

$$h^{k,l}_{1,1} = h^{k,l}_{k,l} = 1, \text{ et } h^{k,l}_{1,l} = h^{k,l}_{k,1} = -1$$

Montrer que pour tout couple $(k,l) \in \{2,\ldots,n\}^2, H^{k,l}$ est élément de H et que l'ensemble des matrices $(H^{k,l})$ forme une base de H

(si $A = (a_{i,j}) \in H$, on pourra considérer la matrice $A' = \displaystyle\sum_{2 \le k,l \le n} a_{k,l} H^{k,l}$).

En déduire la dimension de E.

Solution :

1. Montrons que :

$$E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AJ = JA = m(A)J\}$$

Si A est élément de E, les conditions imposées sur A et un calcul immédiat montrent que $AJ = JA = m(A)J$.

Réciproquement, soit A une matrice réelle vérifiant $AJ = JA = \lambda J$, pour λ réel. La définition de J permet d'écrire :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \lambda$$

E est alors évidemment un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stable par multiplication, puisque si $AJ = JA = m(A)J$ et $BJ = JB = m(B)J$, alors

$$ABJ = m(B)AJ = m(B)m(A)J = JAB$$

Enfin, l'application $A \mapsto m(A)$ est évidemment linéaire.

2. Le sous-espace G est un sous–espace de E. L'application m est une forme linéaire non nulle sur E. Le théorème du rang entraîne que son noyau est de dimension $\dim(E) - 1$. Comme G est de dimension 1, il reste à prouver que

$$G \cap \operatorname{Ker} m = \{0\}$$

Or :

$$A \in G \cap \mathrm{Ker}(m) \Leftrightarrow \begin{cases} A = \lambda J \\ m(A) = 0 \end{cases}$$

Donc $0 = m(A) = \lambda m(J) = n\lambda \implies A = 0$.

3. L'ensemble des matrices $H^{k,l}$ est de cardinal $(n-1)^2$. Chaque matrice $H^{k,l}$ vérifie $m(H^{k,l}) = 0$.

$\star$ Montrons qu'elles forment une famille libre.

Si $\sum\limits_{k,l} \lambda_{k,l} H^{k,l} = 0$, il suffit de regarder chaque terme (i,j) de cette somme pour s'apercevoir que :

$$\forall (i,j) \in (\{2,\ldots,n\})^2,\ 0 = \Big(\sum_{k,l} \lambda_{k,l} H^{k,l}\Big)_{i,j} = \lambda_{i,j}$$

$\star$ Montrons que cette famille engendre $\mathrm{Ker}(m)$.

Soir $A \in \mathrm{Ker}(m)$. Posons $A = (a_{i,j})$ et $A' = \sum\limits_{2 \leq k,l \leq n} a_{k,l} H^{k,l}$, et montrons que $A = A'$.

- $a'_{1,1} = \sum\limits_{s=2}^{n} \sum\limits_{r=2}^{n} a_{r,s} = \sum\limits_{s=2}^{n} (-a_{1,s}) = -(-a_{1,1}) = a_{1,1}$.
- si $i \geq 2, j \geq 2$, alors $a'_{i,j} = a_{i,j}$.
- si $i = 1, j \geq 2$, alors $a'_{1,j} = -\sum\limits_{r=2}^{n} a_{r,j} = a_{1,j}$
- si $i \geq 2, j = 1$, alors $a'_{i,1} = a_{i,1}$.

Ainsi la famille des matrices $(H^{k,l})_{2 \leq k,l \leq n}$ est un système libre et générateur de H et forme une base de H. On en déduit que la dimension de E est égale à $(n-1)^2 + 1$.

Exercice 2-9

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. On identifiera $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices colonne à coefficients réels.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n vérifiant :

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\quad {}^tXAX \geq 0$, et ${}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.

Soit C un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$f(X) = \langle AX, X\rangle - 2\langle C, X\rangle$$

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Déterminer la nature de ces points.

Solution :

1. Soit λ une valeur propre de A (on sait que $\lambda \in \mathbb{R}$), et X une colonne propre associée. On a ${}^tXX > 0$ et :

${}^tXAX \neq 0$ et ${}^tXAX = \lambda {}^tXX \geq 0$, donc $\lambda {}^tXX > 0$ et $\lambda > 0$.

2. Avec des notations évidentes et en développant : $f(X) = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}x_ix_j - 2\sum\limits_i c_ix_i$. Soit, en simplifiant par 2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots a_{1,n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots a_{n,n}x_n = c_n \end{cases} \iff X = A^{-1}C$$

En effet, nous venons de démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.

3. Soit H une matrice colonne quelconque. Dans le calcul de $f(A^{-1}C + H)$ les termes du premier degré en H disparaissent, puisque $A^{-1}C$ est un point critique, et il reste :

$$f(A^{-1}C + H) = f(A^{-1}C) + {}^tHAH$$

Pour $H \neq 0$, on a ${}^tHAH > 0$ et donc f présente au point $A^{-1}C$ un *minimum* absolu strict.

Exercice 2-10

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension n, et f est un endomorphisme de E.

Par convention $f^0 = id$ (application identité) et on définit par récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$, f^k par $f^k = f \circ f^{k-1}$

On dira que f est cyclique s'il existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$$

soit une base de E.

1. Montrer que si f est cyclique, alors $(id, f, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre d'endomorphismes de E.

2. Indiquer à quelles conditions un projecteur de E est cyclique.

3. Dans cette question, on suppose que E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$, et on considère l'endomorphisme d de E défini par : $\forall\, Q \in E$,

$$d(Q)(X) = Q(X+1) - Q(X)$$

a) Que peut-on dire du degré de $d(Q)$ relativement à celui de Q ?

b) Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme d. Est-il diagonalisable ?

c) L'endomorphisme d est-il cyclique ?

4. On suppose dans cette question que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs propres respectivement associés. Montrer à l'aide du vecteur $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$ que f est cyclique.

5. On suppose dans cette question que f est diagonalisable et admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec $p < n$. On pose

$$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$$

a) Calculer $P(f)(x)$ lorsque x est un vecteur appartenant à l'un des sous-espaces propres de f.

b) En déduire que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

c) f est-t-il cyclique ?

Solution :

1. Supposons f cyclique, et soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des scalaires tels que l'on ait $a_0 id + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = 0$.
En particulier, on a : $a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$, où x_0 est un vecteur tel que $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On en déduit la nullité de tous les scalaires et la famille $(id, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

2. Si p est un projecteur, on a $p^2 = p$, donc la famille $(x_0, p(x_0), p^2(x_0), \ldots)$ est toujours liée.
Ainsi, pour qu'un projecteur soit cyclique, il est nécessaire que la dimension de E soit inférieure ou égale à 2, donc égale à 2.
Réciproquement, si $\dim E = 2$, on peut trouver un vecteur x_0 tel que $(x_0, p(x_0))$ soit une base de E, si et seulement si p n'est pas l'identité ou l'application nulle.
Bref, un projecteur est cyclique si et seulement si $\dim E = 2$ et p est la projection sur une droite parallèlement à une autre droite.

3. a) $\star$ Si Q est un polynôme constant, alors $d(Q)$ est le polynôme nul.

$\star$ Sinon, écrivons $Q = a_0 + \cdots + a_q X^q$, avec $q \geq 1$ et $a_q \neq 0$. On obtient :
$d(Q) = q a_q X^{q-1} + \cdots$, ce qui prouve que $d(Q)$ est de degré exactement $q - 1$.

b) $\star$ D'après a), $\operatorname{Ker} d$ est l'ensemble des polynômes constants : $\operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

$\star$ Toujours d'après a) $\operatorname{Im} d \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Or par la formule du rang, on a :

$$\dim \operatorname{Im} d = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] - \dim \operatorname{Ker} d = (n-2) - 1 = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

Ce qui assure que l'on a : $\operatorname{Im} d = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

$\star$ Si λ était une valeur propre non nulle de d et Q un polynôme propre associé, on aurait : $\deg Q = \deg(\lambda Q) = \deg d(Q) = \deg Q - 1$, ce qui est absurde. Ainsi la seule valeur propre possible de d est 0.
De plus 0 est effectivement valeur propre de d, le sous-espace propre associé étant le noyau de d.

$\star$ Si l'endomorphisme d était diagonalisable, comme 0 est son unique valeur propre, d serait l'endomorphisme nul, ce qui est faux. Donc d n'est pas diagonalisable.

c) Prenons par exemple $Q = X^{n-1}$. Alors la famille $(Q, d(Q), \ldots, d^{n-1}(Q))$ est échelonnée en degré, donc est libre dans E, et est de cardinal $n = \dim E$. Ainsi cette famille est une base de E, ce qui prouve que d est cyclique.

4. On a $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$, d'où $f(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, et par une récurrence simple :

$$f^p(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p e_k$$

Donc, si $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p f^p(x_0) = 0$, on a :

$$0 = \sum_{p=0}^{n-1} a_p f^p(x_0) = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{p=0}^{n-1} a_p \lambda_k^p) e_k = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k) e_k, \text{ avec } P = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$$

Or la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, et donc le polynôme P s'annule en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Comme il est de degré inférieur ou égal à $n-1$, il s'agit du polynôme nul et tous les coefficients a_p sont nuls.
La famille $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est donc libre de cardinal n et est une base de E, ce qui prouve que f est cyclique.

5. a) Supposons x propre associé à la valeur propre λ_k.
On a $P(f) = (f - \lambda_1 id) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p id)$ et les endomorphismes écrits commutent entre eux. On peut donc écrire : $P(f) = \cdots \circ (f - \lambda_k id)$. Ainsi :

$$P(f)(x) = \cdots \circ (f - \lambda_k id)(x) = 0.$$

b) Par hypothèse il existe une base de E formée de vecteurs propres de f. D'après a) l'endomorphisme $P(f)$ s'annule en chaque vecteur d'une telle base. Par conséquent $P(f)$ est nul sur une base, donc est l'endomorphisme nul.

c) La question b) montre, en développant $P(f)$, que la famille $(id, f, \ldots, f^p)$ est liée, avec $p < n$. Comme toute sur-famille d'une famille liée est liée, on en déduit que la famille $(id, f, \ldots, f^{n-1})$ est liée.
La question 1. montre alors que f n'est pas cyclique.

Exercice 2-11

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Si $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ a_{i-1} & \text{si } j = n \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On note P_a le polynôme défini par : $P_a(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

1. Soit λ une valeur propre de M_a. Déterminer le rang de la matrice $M_a - \lambda I_n$. En déduire la dimension du sous-espace propre associé.

2. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de M_a si et seulement si $P_a(\lambda) = 0$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur P_a pour que M_a soit diagonalisable.

4. On pose $Q(X) = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$. Montrer que Q possède une racine multiple si et seulement si n est multiple de 6.

5. On prend dans cette question $a = \left(0, -\dfrac{C_{n+1}^1}{n+1}, \dots, -\dfrac{C_{n+1}^{n-1}}{n+1}\right)$, où C_m^p désigne le coefficient binomial habituel. Pour quelles valeurs de n la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Comme λ est une valeur propre de M_a, on sait déjà que $\mathrm{rg}(M_a - \lambda I_n) \leq n-1$.

Par ailleurs $M_a - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & & \dots & a_0 \\ 1 & -\lambda & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a_n - \lambda \end{pmatrix}$ est de rang $\geq n-1$, car les $n-1$ premières colonnes sont échelonnées, donc forment une famille libre.

Ainsi $\mathrm{rg}(M_a - \lambda I_n) = n-1$.

Par le théorème du rang, on en déduit que les sous-espaces propres sont de dimension exactement 1.

2. On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + \dots + \lambda^{n-1} L_n$ et la première ligne de $M_a - \lambda I_n$ devient $(\,0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad P_a(\lambda)\,)$.

On effectue alors, dans cet ordre, les permutations $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \leftrightarrow L_3$, ..., $L_{n-1} \leftrightarrow L_n$, de façon à amener la ligne L_1 en dernière position, sans perturber l'ordre des autres lignes. On obtient ainsi une matrice trigonale supérieure de diagonale $(1,1,\dots,1,P_a(\lambda))$.

Par conséquent les valeurs propres de M_a sont les racines du polynôme P_a.

3. Comme les sous-espaces propres sont de dimension 1, M_a est diagonalisable si et seulement si M_a admet n valeurs propres, c'est-à-dire si et seulement si P_a admet n racines distinctes.

4. Le polynôme Q possède une racine multiple si et seulement si il existe une racine commune à Q et Q'.
Or $Q' = (n+1)[(X+1)^n - X^n]$, d'où :

$$Q(\lambda) = Q'(\lambda) = 0 \iff (S) : \begin{cases} (\lambda+1)^{n+1} - \lambda^{n+1} = 1 \\ (\lambda+1)^n = \lambda^n \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda^n(\lambda+1) - \lambda^{n+1} = 1 \\ (\lambda+1)^n = \lambda^n \end{cases} \iff \lambda^n = (\lambda+1)^n = 1$$

Or : $\lambda^n = (\lambda+1)^n = 1 \implies |\lambda+1| = |\lambda| = 1 \implies \lambda \in \{j, j^2\}$.

On a : $j^n = (j+1)^n = 1 \iff j^n = (-j^2)^n = 1 \iff j^n = (-1)^n = 1$, ce qui se produit si et seulement si n est pair et multiple de 3, donc multiple de 6.
Le calcul est le même pour j^2 (et d'ailleurs ce calcul est inutile puisque j^2 est le conjugué de j)

En conclusion Q possède une racine multiple si et seulement si n est un multiple de 6, Q ayant alors j et j^2 pour racines au moins doubles.

5. Lorsque a est le n-uplet de l'énoncé, on a :

$$P_a(X) = X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{C_{n+1}^k}{n+1} X^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k X^k = \frac{1}{n+1} Q(X)$$

Les questions 3. et 4. montrent alors que M_a est diagonalisable si et seulement si n n'est pas un multiple de 6.

Exercice 2-12

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norme associée étant notée $\|\cdot\|$.

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E tels que :

$$\begin{cases} \forall\, i \in [\![1,n]\!], \|x_i\| = 1 \\ \forall\, i,j \in [\![1,n]\!], i \neq j \implies \|x_i - x_j\| = 1 \end{cases}$$

1. Calculer, pour tout couple d'indices i et j, $\langle x_i, x_j \rangle$.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée d'ordre n, de terme générique $a_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$.
Montrer que A est inversible et en déduire que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Solution :

1. En développant : $\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle$.

Ainsi, pour $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle = \dfrac{1}{2}$ et bien sr $\langle x_i, x_i\rangle = 1$.

2. $\star$ On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & \dots & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \end{cases}$

On en déduit : $x_1 = \cdots = x_n$ et en reportant dans l'une quelconque des équations, il vient $x_1 = \cdots = x_n = 0$, ce qui prouve que le noyau de A se réduit à $\{0\}$ et donc que A est inversible.

(On peut aussi calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de I_n et A, ce qui donne en plus une expression de l'inverse de A, ou remarquer que $A = \dfrac{1}{2}(I + J)$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Les valeurs propres de J sont aisées à calculer et on constate alors que 0 n'est pas valeur propre de A ...).

$\star$ Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ était liée, il existerait des scalaires non tous nuls, tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$, d'où $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle = 0$.

En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A, on aurait donc $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$, et les colonnes de A seraient liées, ce qui nie l'inversibilité de A.

Ainsi la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Exercice 2-13

Soit n un entier supérieur ou égal à deux et E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tout x de E on pose : $F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

1. a) L'application F est-elle un endomorphisme de E ?

   b) L'application F est-elle injective, surjective ?

   c) L'application F est-elle un endomorphisme symétrique de E ?

d) Caractériser les bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ telles que F soit un projecteur.

2. a) Montrer que les valeurs propres de F sont strictement positives.

b) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ F)^{-1}$.

c) Montrer que $\big(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Solution :

1. a) La linéarité de F résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire et des propriétés du calcul vectoriel. D'autre part F est clairement à valeurs dans E, donc F est un endomorphisme de E.

b) Si $F(x) = 0$, on a : $\forall\, k, \langle x, e_k\rangle = 0$ (car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E), ce qui prouve que x est orthogonal à une base de E, donc à tout vecteur de E, et en particulier à x. Ainsi $\|x\|^2 = 0$ et $x = 0$.
Ceci prouve que F est injective, donc est bijective, puisque F est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

c) Pour tous vecteurs x et y, on a :

$$\langle F(x), y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle\langle e_k, x\rangle = \langle F(y), x\rangle$$

Ainsi, F est un automorphisme symétrique.

d) Comme F est un automorphisme, F est un projecteur si, et seulement si, $F = id$.

⋆ Si $F = id$, alors $\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

En particulier, pour tout indice j, $e_j = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k\rangle e_k$ et l'unicité de l'écriture dans une base donne $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$, ce qui prouve que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

⋆ Réciproquement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors :

$$\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \text{ et } F = id.$$

$$F \text{ projecteur} \iff (e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée}$$

2. a) Si λ est une valeur propre de F et x un vecteur propre associé, on a :

$$\lambda\|x\|^2 = \langle F(x), x\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 > 0 \text{ (car } x \neq 0)$$

Donc $\lambda > 0$.

b) $s = (s \circ F)^{-1}$ équivaut à $s \circ s = F^{-1}$. Puisque F est un endomorphisme symétrique, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée telle que $M_{\mathcal{B}}(F) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a : $M_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ et on peut donc considérer l'endomorphisme s tel que $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2})$.

Par construction même, $s \circ s = F^{-1}$, s est un automorphisme et s est symétrique, donc s convient.

c) Pour tout couple (i,j), on a : $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \langle e_i, s \circ s(e_j)\rangle = \langle e_i, F^{-1}(e_j)\rangle$.

Or : $e_j = F(F^{-1}(e_j)) = \sum_{i=1}^{n} \langle F^{-1}(e_j), e_i\rangle e_i$, d'où : $\langle F^{-1}(e_j), e_i\rangle = \delta_{i,j}$.

Ainsi $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \delta_{i,j}$ et donc $\big(s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2-14

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $A^n = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de montrer que $A^{12} = I_2$.

On note σ l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de A.

1. Montrer que $\lambda \in \sigma$ si et seulement si $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$. En déduire que σ n'est pas vide.

On admettra que la matrice A vérifie la relation : $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$ $(\star)$.

2. Montrer que σ vérifie l'une, et l'une seulement, des deux propositions suivantes :
 a) $\sigma \subseteq \{-1, 1\}$
 b) il existe un entier p tel que $1 \leq p < n/2$ et $\sigma = \{e^{-2ip\pi/n}, e^{2ip\pi/n}\}$.
Que peut-on dire, dans ce cas, du nombre $2\cos(2p\pi/n)$?

3. On suppose que $\text{card}(\sigma) = 2$. En étudiant les différents cas, montrer que $A^{12} = I_2$.

4. On suppose que $\sigma = \{1\}$ et que $A \neq I_2$.
 a) En utilisant la relation $(\star)$, montrer que $\text{Ker}(A - I_2) = \text{Im}(A - I_2)$
 b) En déduire que A est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 c) Calculer T^k, pour $k \geq 1$. En déduire une contradiction.

5. Montrer que si $\sigma = \{-1\}$ et $A \neq -I_2$, on arrive également à une contradiction.

Conclure.

Solution :

1. λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_2$ n'est pas inversible, donc si et seulement si : $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$.
Ce qui donne en développant :
$$\lambda\in\sigma \iff \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$
Une équation du second degré à coefficients réels ayant toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$, on en déduit que σ est non vide.

La formule $(*)$ se vérifierait facilement, il suffit de faire les calculs ...

2. Si λ est une valeur propre de A, alors λ^n est une valeur propre de A^n, donc d'après l'hypothèse faite sur A :
$$\lambda^n=1$$
Si le spectre de A est réel, on a donc $\sigma\in\{-1,1\}$.

Sinon, il existe une valeur propre de A de la forme $\lambda_1=\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}$, avec $0\leq p<n$, et donc $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=\mathrm{e}^{-i\frac{2p\pi}{n}}$ est aussi valeur propre de la matrice A.

Or les valeurs propres de A ne sont pas réelles, donc sont distinctes, et quitte à permuter les rôles de λ_1 et λ_2, on peut supposer que l'on a $0<p<\dfrac{n}{2}$ (pour éviter les nombres -1 et 1).
En conclusion, dans ce cas $\sigma=\{\mathrm{e}^{-2ip\pi/n},\mathrm{e}^{2ip\pi/n}\}$

On a alors $\lambda_1+\lambda_2=2\cos(\dfrac{2p\pi}{n})=a+d\in\mathbb{Z}$.

3. Si A a deux valeurs propres distinctes.
$\star$ Si elles sont réelles, on a $\sigma=\{-1,1\}$, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(-1,1)$ et A^2 est semblable à I_2, donc vaut I_2, *a fortiori* $A^{12}=I_2$.

$\star$ Sinon, elles sont complexes conjuguées, donc de la forme vue en 2, avec $2\cos(\dfrac{2p\pi}{n})\in\mathbb{Z}$, donc $2\cos(\dfrac{2p\pi}{n})\in\{-1,0,1\}$ (les valeurs -2 et 2 ne correspondent pas à des valeurs propres complexes non réelles).

Si $\cos(\dfrac{2p\pi}{n})=-\frac{1}{2}$, les valeurs propres sont j et j^2, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(j,j^2)$ et A^3 est semblable à I_2, donc vaut I_2. *A fortiori* $A^{12}=I_2$.

Si $\cos(\dfrac{2p\pi}{n})=0$, les valeurs propres sont i et $-i$, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(i,-i)$ et A^4 est semblable à I_2, donc vaut I_2. *A fortiori* $A^{12}=I_2$.

Si $\cos(\dfrac{2p\pi}{n})=\frac{1}{2}$, les valeurs propres sont $-j$ et $-j^2$, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(-j,-j^2)$ et A^6 est semblable à I_2, donc vaut I_2. *A fortiori* $A^{12}=I_2$.

4. a) Si 1 est l'unique valeur propre de A, alors l'équation $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$ équivaut à l'équation $(\lambda-1)^2=0$, donc $a+d=2, ad-bc=1$.
La relation $(*)$ s'écrit donc : $A^2-2A+I_2=0$,*i.e.* $(A-I_2)(A-I_2)=0$

On a donc $\mathrm{Im}(A - I_2) \subset \mathrm{Ker}(A - I_2)$.

Or : $\dim \mathrm{Im}(A-I_2)+\dim \mathrm{Ker}(A-I_2) = 2$ et $A-I_2$ n'est pas inversible et n'est pas non plus la matrice nulle. Ainsi $\dim \mathrm{Im}(A - I_2) = \dim \mathrm{Ker}(A - I_2) = 1$ et l'inclusion précédente montre que :

$$\mathrm{Im}(A - I_2) = \mathrm{Ker}(A - I_2)$$

b) Soit e_2 un vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(A - I_2)$, le vecteur $e_1 = (A - I_2)(e_2)$ est tel que $(A - I_2)(e_1) = (A - I_2)^2(e_2) = 0$.

Donc $A(e_1) = e_1$, tandis que $A(e_2) = e_1 + e_2$.

La famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ (e_1 est propre pour A et pas e_2). Par conséquent A est semblable à la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Facilement $\forall\, k \geq 1, T^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or il existe $n \geq 2$ tel que $A^n = I_2$, donc, pour le même entier n, on a $T^n = P^{-1}A^nP = I_2$. La contradiction est claire.

5. On fait le même raisonnement qu'en 4., en utilisant $A + I_2$ et on aboutit également à une contradiction.

Dans tous les cas possibles, on a trouvé $A^{12} = I_2$ et donc le but est atteint.

Exercice 2-15

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. Pour P et Q dans E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\, dt$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 + xt^2 + yt + z)^2\, dt$

Montrer qu'il existe un unique triplet (x_0, y_0, z_0) tel que f présente en (x_0, y_0, z_0) un minimum absolu et déterminer ce triplet.

Solution :

1. Comme P et Q sont des polynômes, si $n = \deg(PQ)$, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}P(t)Q(t) = 0$ entraîne l'existence de l'intégrale proposée.

On vérifie que la forme proposée est bilinéaire, symétrique et positive.

Si de plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}P^2(t)dt = 0$, par positivité et continuité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}P^2(t)$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-t}P^2(t) = 0$ pour tout t réel et P est le polynôme nul : on a donc effectivement un produit scalaire.

2. En fait $f(x,y,z)$ représente le carré de la distance du polynôme X^3 au sous–espace $\mathbb{R}_2[X]$.
On sait que cette distance est atteinte en un unique polynôme qui est la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. ce qui se traduit par : $X^3-(-x_0X^2-y_0X-z_0)$ est orthogonal à la base canonique $1, X, X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit, après calculs :

$$\begin{cases} 24x_0+6y_0+2z_0 & = & -120 \\ 6x_0+2y_0+z_0 & = & -24 \\ 2x_0+y_0+z_0 & = & -6 \end{cases} \iff (x_0,y_0,z_0)=(-9,18,-6)$$

Exercice 2-16

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $(\alpha,\beta,n)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}^*$, pour que le polynôme $P_1=X^8+X^4+1$ divise le polynôme $P_2=X^{8n}+\alpha X^{4n}+\beta$.

Solution :

On a : $(X^8+X^4+1)(X^4-1)=X^{12}-1$.

Par conséquent, les racines de X^8+X^4+1 sont les racines douzièmes de l'unité, sauf celles qui sont racines quatrièmes de l'unité.

Les racines de P_1 sont donc simples et sont les nombres $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{12}}$, avec $0\le k\le 11$ et $k\notin\{0,3,6,9\}$.

P_1 divise P_2 si et seulement si ces nombres sont racines de P_2, ce qui conduit au système :

$$\forall\, k\in[\![1,11]\!]\setminus\{3,6,9\}, \mathrm{e}^{i\frac{4kn\pi}{3}}+\alpha\mathrm{e}^{i\frac{2kn\pi}{3}}+\beta=0$$

Ce qui équivaut à : $\begin{cases}\cos(\dfrac{2kn\pi}{3})(\alpha+1)+\beta=0\\ \sin(\dfrac{2kn\pi}{3})(\alpha-1)=0\end{cases}$, pour tout $k\in[\![1,11]\!]\setminus\{3,6,9\}$

Si n est un multiple de 3, il reste $\alpha+\beta+1=0$;
si n n'est pas un multiple de 3, on obtient $\alpha=1$ et comme $\cos(\dfrac{2kn\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}$ (on évite les valeurs de k multiples de 3), il vient $\beta=1$.

Exercice 2-17

Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels, non scalaire (c'est-à-dire que A n'est pas de la forme $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$).

On dira qu'une suite (B_n) d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $B_n=(b_{i,j,n})_{1\le i,j\le 2}$, converge vers une matrice $B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$ si pour tout $(i,j)\in\{1,2\}^2$, la suite de nombres réels $(b_{i,j,n})$ converge vers le nombre réel $b_{i,j}$.

1. On suppose que A possède deux valeurs propres réelles distinctes.

a) Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. exprimer S_n ainsi que son éventuelle limite, lorsque n tend vers l'infini. On notera cette limite $\exp(A)$.

c) Déterminer les valeurs propres de $\exp(A)$ en fonction de celles de A.

d) Montrer que $\exp(A)$ est une matrice inversible.

2. On suppose maintenant que A ne possède qu'une seule valeur propre.

a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible, telles que $P^{-1}AP = J$, avec $J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer J^n.

c) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Déterminer S_n ainsi que son éventuelle limite, lorsque n tend vers l'infini. On notera encore cette limite $\exp(A)$.

d) Déterminer les valeurs propres de $\exp(A)$ en fonction de celle de A. Montrer que $\exp(A)$ est une matrice inversible.

3. A t-on toujours $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$?

Solution :

1. a) La matrice A est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres, donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq b$ et une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

b) On a alors $A^k = PD^kP^{-1}$, d'où :

$$S_n = P\Sigma_n P^{-1}, \text{ avec } \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k$$

Or : $\Sigma_n = \operatorname{diag}(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}) \longrightarrow \operatorname{diag}(\mathrm{e}^a, \mathrm{e}^b)$, et, en revenant au calcul effectif d'un produit de matrices, on voit aisément que la limite d'un produit est le produit des limites, donc :

$$\exp A = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix} P^{-1}$$

c) Le résultat précédent montre que $\operatorname{Spec}(\exp A) = \{\mathrm{e}^a, \mathrm{e}^b\}$

d) Une exponentielle n'étant jamais nulle, 0 n'est pas valeur propre de $\exp A$, et cette matrice est bien inversible.

2. Soit a l'unique valeur propre de A.

a) La matrice A n'est pas diagonalisable, sinon A serait semblable à aI_2, donc serait égale à aI_2, ce qui est exclu par l'énoncé.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ une colonne propre associée à la valeur propre a et Q une matrice inversible de première colonne X (possible, d'après le théorème de la base incomplète). La matrice $Q^{-1}AQ$ est de la forme $T = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Les matrices A et T étant semblables, elles ont mêmes valeurs propres et $\beta = a$, de plus on sait que $\alpha \neq 0$ (puisque A n'est pas diagonalisable), donc $T = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Or, si on prend $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, avec $k \neq 0$, (on garde le premier vecteur de base, qui est propre, et on change le second), un calcul simple donne :

$$RTR^{-1} = \begin{pmatrix} a & \dfrac{\alpha}{k} \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ainsi, en prenant $k = \alpha$, la matrice T, donc la matrice A, est semblable à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) On obtient, par une récurrence facile, ou par la formule du binôme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, J^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

c) Comme $A^k = PJ^kP^{-1}$, il vient :

$$S_n = P \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k.a^k}{k!} \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc, en simplifiant la sommation du terme placé en première ligne et deuxième colonne :

$$\exp A = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & \mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^a \end{pmatrix} P^{-1}$$

d) $\exp A$ admet donc e^a pour unique valeur propre et cette valeur propre étant non nulle, $\exp A$ est inversible.

3. La réponse est non. Il suffit de trouver un contre-exemple. En fait, tout couple de matrices (A, B) tel que $AB \neq BA$ convient.

On peut proposer : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 0 \neq AB$.

Les calculs de $\exp A, \exp B$ et $\exp(A+B)$ sont alors très simples (on a $A^2 = 0$, $B^2 = 0$ et AB est diagonale) :
$\exp A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Il est clair que $\exp(A+B) \neq \exp A . \exp B$.

Exercice 2-18

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application Φ qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. a) Soit f un élément de E et F une primitive de f. Exprimer $\Phi(f)$ en fonction de F pour x non nul. En déduire la continuité de $\Phi(f)$ en 0.
Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Soit $f \in \operatorname{Ker} \phi$. Etudier la parité de f. Déterminer le noyau de Φ. L'endomorphisme Φ est-il injectif ?

2. L'endomorphisme Φ est-il surjectif ?

3. On appelle valeur propre de Φ tout réel λ tel qu'il existe $f \in E$ non nul tel que $\Phi(f) = \lambda f$. Un tel élément s'appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ.
Soit λ une valeur propre non nulle de Φ et f un vecteur propre associé.

a) Montrer que f est une fonction paire.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer f' en fonction de f.

c) Pour quelles valeurs de α la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto |x|^\alpha$ est-elle solution de l'équation trouvée dans la question précédente ?

d) Soit $E_\lambda = \{f \mid \Phi(f) = \lambda f\}$ et $h \in E_\lambda$ non nul.
Pour tout $x \neq 0$, on définit $k(x)$ par $h(x) = k(x)|x|^\alpha$. Déterminer la fonction k. En déduire le sous–espace E_λ.

e) Montrer que tout réel est valeur propre de Φ.

Solution :

1. a) Soit $x \neq 0$. On peut écrire :

$$g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(x) - F(0)}{x} - \frac{F(-x) - F(0)}{x}\right]$$

Par la définition de la dérivée, on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f(0),\quad \lim_{x\to 0}\frac{F(-x)-F(0)}{x}=-f(0)$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} g(x)=f(0)$, ce qui signifie que g est prolongeable en 0.

Pour $x_0\neq 0$, g est continue en x_0 comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi Φ est une application de E dans E qui est linéaire par linéarité de l'intégrale.

b) Si $f\in \operatorname{Ker}\Phi$, alors $f(0)=0$ et pour tout $x\neq 0, F(x)=F(-x)$. En dérivant, il vient, pour $x\neq 0, f(x)=-f(-x)$, c'est-à-dire f impaire.

Réciproquement, si f est impaire, $f(0)=0$ et, pour $x\neq 0$:

$$\int_0^x f(t)\,dt=-\int_x^0 f(t)\,dt$$

ce qui entraîne que $g(x)=0$ pour $x\neq 0$, et que $f\in\operatorname{Ker}\Phi$. Finalement :

$$\operatorname{Ker}\Phi=\{f\mid f\text{ impaire}\}$$

2. La fonction g est dérivable pour tout $x\neq 0$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas.
Par exemple, la fonction $x\mapsto |x-1/2|$ ne peut avoir d'antécédent par Φ, qui n'est donc pas surjective.

3. a) Soit f un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $\lambda\neq 0$. On a alors :

$$f(0)=\lambda f(0),\quad (x\neq 0)\implies \int_{-x}^x f(t)\,dt=2\lambda x f(x)$$

Ainsi, pour $x\neq 0$:

$$f(-x)=-\frac{1}{2\lambda x}\int_x^{-x} f(t)\,dt=\frac{1}{2\lambda x}\int_{-x}^x f(t)\,dt=f(x)$$

Ainsi f est une fonction paire.

b) Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable et pour $x\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\lambda}\left(-\frac{1}{x^2}\int_{-x}^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}(f(x)+f(-x))\right)$$

Or la fonction f est paire. Il vient donc :

$$(1-\lambda)f(x)=\lambda x f'(x)$$

c) La fonction $f:x\mapsto |x|^\alpha$ vérifie l'équation précédente si et seulement si :

- pour $x>0,\ (1-\lambda)x^\alpha-\lambda\alpha x^\alpha=0$
- pour $x<0,\ (1-\lambda)(-x)^\alpha-\lambda\alpha x(-x)^{\alpha-1}=0$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$\alpha=\frac{1-\lambda}{\lambda}$$

d) Soit h la fonction $x \mapsto k(x)|x|^\alpha$. Si la fonction h vérifie l'équation précédente alors pour $x > 0$:

$$(1-\lambda)k(x)x^\alpha - \lambda x(k'(x)x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}k(x)) = 0$$

avec :

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

Donc $k'(x) = 0$ et k est une fonction constante sur $\mathbb{R}^+$. La démonstration pour $x < 0$ est identique.
Finalement :

$$E_\lambda = \{C.f \mid C \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$f : x \mapsto |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

e) On a vu que 0 est valeur propre de Φ ainsi que tout $\lambda \neq 0$. Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de Φ est $\mathbb{R}$.