

ALGÈBRE

Exercice 1.

Soit $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre s à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, on note tA la matrice transposée de A .

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^s , on pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^s x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^s$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne de x .

Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^s , on note E^\perp l'orthogonal de E .

1. On suppose dans cette question que $s = 4$, et on considère la matrice :

$$P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer tP et P^2 .

b) Déterminer les valeurs propres de P et les sous-espaces propres associés. Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous-espace de \mathbb{R}^4 que l'on déterminera.

2. On revient maintenant au cas général (s quelconque). Montrer que la matrice $P \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si on a $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

3. Soient P et Q deux matrices de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ représentant chacune une projection orthogonale. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^s$:

$$\|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \leq \|x\|^2 \quad (*)$$

a) Montrer que $PQ = QP = 0$.

b) En déduire que $P + Q$ est la matrice d'une projection orthogonale.

4. Soient P_1, P_2, \dots, P_n , n matrices représentant chacune une projection orthogonale de \mathbb{R}^s et telles que $P_1 + P_2 + \dots + P_n = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.

Montrer que pour toute partie non vide E de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{k \in E} P_k$ est la matrice d'une projection orthogonale de \mathbb{R}^s .

5. On se place à nouveau dans \mathbb{R}^4 et on considère la matrice :

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que Q est la matrice d'une projection orthogonale de \mathbb{R}^4 .

b) Montrer que P et Q vérifient la relation (*), où P est la matrice de la première question. Que peut-on dire de $P + Q$?

Solution :

1. a) On trouve ${}^tP = P^2 = P$.

b) P est une matrice de projecteur (non dégénéré), ses valeurs propres sont donc 0 et 1.

L'image de P est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et est engendrée par le vecteur $(1 - 1, 1, 1)$.

Le noyau de P est l'hyperplan H d'équation $x - y + z + t = 0$ (regarder les lignes de P). Cet hyperplan est l'orthogonal de $\text{Vect}(1 - 1, 1, 1)$ et P est le projecteur orthogonal sur H .

2. * On $P^2 = P$ si et seulement si P représente un projecteur.

* P est une matrice symétrique si et seulement si elle représente, dans la base canonique de \mathbb{R}^s , un endomorphisme admettant une base orthonormée de vecteurs propres.

Donc une matrice de projecteur est symétrique si et seulement si $\text{Im } P$ et $\text{Ker } P$ (qui sont les sous-espaces propres) sont orthogonaux, donc si et seulement si P est une matrice de projecteur orthogonal.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}^s$, appliquons (*) au vecteur Px :

$$\|P^2x\|^2 + \|QPx\|^2 = \|Px\|^2 + \|QPx\|^2 \leq \|Px\|^2$$

Donc $\|QPx\|^2 \leq 0$ et $QPx = 0$. On montre de même que $PQx = 0$:

$$\boxed{PQ = QP = 0}$$

b) * P et Q sont symétriques, il en est de même de $P + Q$.

$$\star (P + Q)^2 = P^2 + Q^2 + PQ + QP = P^2 + Q^2 = P + Q.$$

Donc $P + Q$ est une matrice de projecteur orthogonal.

4. Comme P_1, \dots, P_n sont n matrices de projections orthogonales telles que l'on ait $P_1 + \dots + P_n = I$, il vient :

$$\begin{aligned} \|P_1 x\|^2 + \dots + \|P_n x\|^2 &= \langle P_1 x, P_1 x \rangle + \dots + \langle P_n x, P_n x \rangle \\ &= \langle x, {}^t P_1 P_1 x \rangle + \dots + \langle x, {}^t P_n P_n x \rangle \\ &= \langle x, P_1^2 x \rangle + \dots + \langle x, P_n^2 x \rangle = \langle x, (P_1 + \dots + P_n)x \rangle \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si $k \neq \ell$, on a sûrement $\|P_k x\|^2 + \|P_\ell x\|^2 \leq \|x\|^2$ et donc $P_k P_\ell = 0$.

Il s'ensuit que : $(\sum_{k \in E} P_k)^2 = \sum_{k \in E} P_k^2 = \sum_{k \in E} P_k$, donc $\sum_{k \in E} P_k$ est une matrice de projection.

Comme $\sum_{k \in E} P_k$ est encore symétrique, il s'agit même d'une projection orthogonale.

5. a) On vérifie que ${}^t Q = Q^2 = Q$.

b) Pour $m = (x, y, z, t)$ on obtient après calculs :

$$\|Pm\|^2 + \|Qm\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - \frac{1}{4}(x - y - z - t)^2 \leq \|x\|^2.$$

Donc $P + Q$ est une matrice de projecteur orthogonal, ce qui se vérifie facilement directement.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout x réel : $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

Déterminer le degré de T_n .

2. a) Montrer que l'application :

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que la famille $(T_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire. Déterminer la norme de T_n .

Solution :

$$1. T_0(\cos x) = \cos(0.x) \implies T_0 = 1 ;$$

$$T_1(\cos x) = \cos(1.x) \implies T_1 = X ;$$

Supposons la famille construite jusqu'à un certain rang $n \geq 1$, on a :

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2 \cos x \cos(nx)$$

On peut donc prendre $T_{n+1}(X) = 2XT_n(x) - T_{n-1}(X)$

Enfin si $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = Q_n(\cos x) = \cos(nx)$, les polynômes T_n et Q_n coïncident en tout point de $[-1, 1]$, donc $T_n - Q_n$ a une infinité de zéros et est le polynôme nul, ce qui prouve l'unicité.

2. a) La fonction à intégrer est continue sur $] -1, 1[$ et la convergence de l'intégrale pour la borne 1, résulte de la règle de Riemann, puisqu'il existe M tel que :

$$\frac{|P(t)Q(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{M}{(1-t)^{1/2}}$$

On procède de même pour la borne -1 .

Ceci étant dit, il est clair que l'application proposée est bilinéaire et symétrique.

Enfin $\int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si la fonction à intégrer est nulle sur $] -1, 1[$, donc que si P est le polynôme nul.

On a bien défini ainsi un produit scalaire.

b) Par le changement de variable $t = \cos u$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi \frac{\cos(nu)\cos(ku)}{|\sin u|} \sin u du = \int_0^\pi \cos(nu)\cos(ku) du.$$

On a : $\cos(nu)\cos(ku) = \frac{1}{2}(\cos((n+k)u) + \cos((n-k)u))$.

★ Si $k \neq n$, l'intégration se fait sans problème et l'intégrale est nulle :

La famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale

★ Si $k = n = 0$, l'intégrale vaut π et $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.

★ Si $k = n \neq 0$, $\int_{-1}^1 \frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2nu)) du = \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$\boxed{\|T_0\| = \sqrt{\pi}; \forall n \geq 1, \|T_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Exercice 3.

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire usuel.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n .

1. Calculer les produits matriciels tXY et $X{}^tY$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $B = X{}^tY$. Cette matrice est-elle diagonalisable?
On précisera également son noyau et son rang.

3. Montrer réciproquement que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 peut s'écrire sous la forme $M = X {}^t Y$, avec X et Y deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n . Sont-ils uniques ?

4. On considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients :

$$a_{i,j} = \delta_{i,j} + x_i y_j \quad \text{où} \quad \begin{cases} \delta_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À quelle condition (nécessaire et suffisante) portant sur X et Y la matrice A est-elle inversible ? Expliciter alors son inverse.

Solution :

1. Un calcul immédiat donne : ${}^t X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle X, Y \rangle$

et :

$$X \cdot {}^t Y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

2. La matrice $B = X {}^t Y$ est de rang 1 (toutes ses colonnes sont proportionnelles à la première colonne X). Ainsi $\dim \text{Ker } B = n - 1$ et 0 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension $(n - 1)$.

De plus $\text{Im } B = \text{Vect}(X)$, et : $BX = X {}^t Y X = \langle X, Y \rangle X$.

Notons qu'un vecteur propre de B associé à une éventuelle valeur propre non nulle est nécessairement un vecteur de l'image de B .

Ainsi, si $\langle X, Y \rangle \neq 0$, on obtient une base de vecteurs propres de B en complétant une base de $\text{Ker } B$ par X et B est diagonalisable, les valeurs propres étant 0 et $\langle X, Y \rangle$.

En revanche, si $\langle X, Y \rangle = 0$, 0 est l'unique valeur propre de B et B n'est pas diagonalisable.

B est diagonalisable si et seulement si $\langle X, Y \rangle \neq 0$.

3. Si M est une matrice de rang 1, toutes ses colonnes (C_1, \dots, C_n) sont proportionnelles à une même colonne X , soit $C_i = y_i X$. On a alors

$$M = X {}^t Y, \quad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas unicité, puisque si (X, Y) est solution, pour tout $\alpha \neq 0$, $(\alpha X, Y/\alpha)$ est également solution.

4. On a immédiatement $A = I + B$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et $1 + \langle X, Y \rangle$, et A est inversible et seulement si $\langle X, Y \rangle + 1 \neq 0$ (car dans ce cas 0 n'est pas valeur propre de A).

On a $B^2 = \langle X, Y \rangle B$, donc $(A - I)^2 = \langle X, Y \rangle (A - I)$, d'où :

$$A^2 - (\langle X, Y \rangle + 2)A = -(\langle X, Y \rangle + 1)I$$

et

$$A^{-1} = \frac{(\langle X, Y \rangle + 2)I - A}{\langle X, Y \rangle + 1}$$

Exercice 4.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, on dit que la suite (A_n) converge si les quatre suites réelles (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) sont convergentes. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n & \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n & \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

est alors appelée limite de la suite (A_n) .

Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose pour tout n entier naturel :

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^n M^k = I_2 + M + \cdots + M^n$$

où I_2 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui converge vers A et P une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la suite (PA_n) converge vers PA . Que peut-on dire de la suite (A_nP) ?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer, pour n entier naturel, $S_n(P^{-1}AP)$ en fonction de $S_n(A)$ et de P .

b) En déduire que la suite $(S_n(A))$ converge si et seulement si la suite $(S_n(P^{-1}AP))$ converge.

3. Soit u un endomorphisme non diagonalisable de \mathbb{R}^2 admettant une valeur propre a .

a) Préciser l'ensemble des valeurs propres de u et la dimension de l'espace propre de u associé à la valeur propre a .

b) Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre a et e_2 un vecteur de \mathbb{R}^2 tel que $B = (e_1, e_2)$ soit une base de \mathbb{R}^2 . Justifier l'existence d'un tel vecteur e_2 et montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^*$ tel que la matrice de u dans la base B soit égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer alors la matrice de u dans la base $C = (be_1, e_2)$ de \mathbb{R}^2 .

4. Soit a un réel et T la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer, pour tout entier naturel n , la matrice T^n .

b) En déduire que la suite $(S_n(T))$ est convergente si et seulement si $a \in]-1, 1[$ et calculer alors la limite de cette suite.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant au moins une valeur propre réelle.

a) Montrer que $(S_n(A))$ est convergente si et seulement si les valeurs propres de A appartiennent toutes à $]-1, 1[$.

b) Calculer, pour n entier naturel, $(I_2 - A)S_n(A)$ et en déduire que, lorsque la suite $(S_n(A))$ converge, sa limite est égale à l'inverse de la matrice $I_2 - A$.

Solution :

1. Soit $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Alors :
 $PA_n = \begin{pmatrix} pa_n + qc_n & pb_n + qd_n \\ ra_n + sc_n & rb_n + sd_n \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{pmatrix} = PA$.

On montre de même que $(A_n P)$ converge vers AP .

2. a) Pour tout entier k , $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ et donc :

$$S_n(P^{-1}AP) = P^{-1}S_n(A)P.$$

b) \star Si la suite $(S_n(A))$ converge vers $S(A)$, alors $(P^{-1}S_n(A)P)$ converge vers $P^{-1}S(A)P$.

\star On obtient l'implication réciproque en remarquant que si $A' = P^{-1}AP$, alors on a : $A = P'^{-1}A'P'$, avec $P' = P^{-1}$.

3. a) Comme u n'est pas diagonalisable, a est sa seule valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

b) e_1 est propre, donc non nul et (e_1) est une famille libre, que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. La matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, mais le fait que u ait a pour unique valeur propre impose $c = a$ et le fait que u ne soit pas diagonalisable impose $b \neq 0$. Donc $\mathcal{C} = (be_1, e_2)$ est encore une base et $M_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

4. Par récurrence, ou par la formule du binôme : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

b) Ainsi $S_n(T) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n a^k & \sum_{k=1}^n ka^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^n a^k \end{pmatrix}$ et $(S_n(T))$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$ et on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(T) = \begin{pmatrix} (1-a)^{-1} & (1-a)^{-2} \\ 0 & (1-a)^{-1} \end{pmatrix}$$

5. a) Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $c = 0$ si A est diagonalisable et $c = 1$ si $a = b$ et A non diagonalisable.

Notons que a et b sont les valeurs propres de A et que $(S_n(A))$ converge si et seulement si $(S_n(T))$ converge.

$$\text{Si } c = 0, S_n(T) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n a^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n a^k \end{pmatrix}$$

Si $c = 1$, $a = b$ et le calcul a été fait en 4. b).

Dans tout les cas $(S_n(A))$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$ et $-1 < b < 1$.

b) Facilement, par télescopage : $(I_2 - A)S_n(A) = I_2 - A^{n+1}$.

Si la suite $(S_n(A))$ converge, alors $A^{n+1} = S_{n+1}(A) - S_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et :

$(I_2 - A)S(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(I_2 - A)S_n(A)] = I_2$, ce qui prouve que $I_2 - A$ est inversible (on le savait car 1 n'est pas valeur propre de A) et que :

$$S(A) = (I_2 - A)^{-1}$$

Exercice 5.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A sur la base canonique de \mathbb{R}^n .

Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ .

En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .

Solution :

1. On remarque que la matrice A (donc l'endomorphisme associé φ) est de rang 2 (les deux premières colonnes sont indépendantes, les autres étant proportionnelles à la seconde).

L'image $\text{Im } \varphi$ est de dimension 2 ; une base est, par exemple : $(e_1, \sum_{i=1}^n e_i)$.

Par le théorème du rang, le noyau $\text{Ker } \varphi$ est de dimension $(n-2)$. En utilisant les colonnes de A , la famille $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \dots, e_2 - e_n)$ forme une base de ce noyau.

2. Ainsi 0 est valeur propre de A , et le sous-espace propre qui lui est associé est $\text{Ker } A$ de dimension $(n - 2)$.

Les vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres non nulles sont dans $\text{Im } \varphi$ (puisque $\varphi(x) = \lambda x, \lambda \neq 0$).

Soit (e_1, v) , avec $v = \sum_{i=1}^n e_i$ la base de $\text{Im } \varphi$ précédemment déterminée, et ψ l'endomorphisme de $\text{Im } \varphi$ induit par φ .

On a $\psi(e_1) = v, \psi(v) = v + (n - 1)e_1$. Donc $M = M_{(e_1, v)}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & n - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de ψ sont $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{4n - 3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{4n - 3}}{2}$ et on peut prendre pour vecteurs propres associés $(\lambda_i - 1)e_1 + v$.

Ces valeurs propres et ces vecteurs propres sont les éléments propres de φ manquants.

La matrice A est donc diagonalisable, ce que l'on savait depuis le début de l'exercice, puisqu'elle est symétrique réelle.

Exercice 6.

1. Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

Soit f un endomorphisme symétrique de E .

On note α la plus petite valeur propre réelle de f et ω la plus grande valeur propre réelle de f .

1. a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\alpha \|x\|^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \leq \omega \|x\|^2$.

b) Existe-t-il un vecteur non nul x de E qui vérifie $\langle x, f(x) \rangle = \omega \|x\|^2$?
Est-il vrai que si r est un réel tel que, pour tout $x \in E$, $\langle x, f(x) \rangle \leq r \|x\|^2$, alors $r \geq \omega$?

Répondre aux questions analogues concernant α .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels,

$$2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 + x_n^2$$

et

$$2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

3. Soient un entier $n \geq 2$ et un réel k .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & k & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note α la plus petite valeur propre de A et ω la plus grande valeur propre de A .

a) Montrer que $k - 2 \leq \alpha$ et que $\omega \leq k + 2$.

b) Montrer ensuite que $\alpha \leq k - 1$ et que $\omega \geq k + 1$.

On cherchera une colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tXAX \leq (k - 1) {}^tXX$ et une colonne non nulle $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tYAY \geq (k + 1) {}^tYY$.

Solution :

1. a) Comme f est un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ et $\langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i$.

Ainsi : $\alpha \|x\|^2 = \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i \leq \omega \sum_{i=1}^n x_i^2 = \omega \|x\|^2$, soit :

$$\alpha \|x\|^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \leq \omega \|x\|^2$$

b) Si x est un vecteur propre associé à la valeur propre ω , on a :

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \omega x \rangle = \omega \|x\|^2$$

La réponse est « oui », car si cela est vrai pour tout vecteur x , cela est vrai en particulier pour un vecteur propre x associé à ω et on a alors $\omega \|x\|^2 \leq r \|x\|^2$, i.e. $r \geq \omega$.

De même, si x est propre pour la valeur propre α , alors $\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \alpha x \rangle = \alpha \|x\|^2$ et si, pour tout x , $\langle x, f(x) \rangle \geq r \|x\|^2$, alors $r \leq \alpha$.

2. Il suffit de développer les seconds membres et on retrouve bien les premiers membres.

3. a) \mathbb{R}^n étant muni de sa structure euclidienne canonique, A traduit un endomorphisme symétrique u . Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, en notant X la matrice colonne associée au vecteur x , on a :

$$\begin{aligned} \langle x, u(x) \rangle &= {}^tXAX = k \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= (k - 2) \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 + x_n^2 \geq (k - 2) \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

On en conclut donc que $\alpha \geq k - 2$ (cf. 1. b).

De même :

$$\begin{aligned} \langle x, u(x) \rangle &= k \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= (k + 2) \sum_{i=1}^n x_i^2 - (x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 + x_n^2) \leq (k + 2) \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

On en conclut donc que $\omega \leq k + 2$ (cf. 1. b).

b) ★ Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, on a ${}^t X A X = 2k - 2$ et ${}^t X X = 2$. Ainsi, si x

est le vecteur associé à X , on a $\langle x, u(x) \rangle = (k - 1)\|x\|^2$, ce qui prouve que $\alpha \leq k - 1$.

De même la considération de la colonne $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et du vecteur y associé donne $\langle y, u(y) \rangle = (k + 1)\|y\|^2$, ce qui prouve que $\omega \geq k + 1$.

Exercice 7.

Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un espace vectoriel euclidien E muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par les familles (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) de E .

On suppose de plus que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$ et on pose pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, z_j = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_j \rangle e_i$, où la famille (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

1. Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer l'équivalence des deux assertions :

- i) la famille (x_1, \dots, x_p) est liée.
- ii) la famille (z_1, \dots, z_p) est liée.

2. En déduire que $\dim F = \dim G$.

Solution :

1. $i) \Rightarrow ii)$. S'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ réels non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j = 0$, par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j z_j = \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_j \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle x_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \rangle e_i = 0$$

et la famille (z_1, \dots, z_p) est liée.

$ii) \Rightarrow i)$. Sil existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ réels non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j z_j = 0$, alors :

$$0 = \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_j \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle x_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \rangle e_i$$

Donc, par liberté de $(e_1, \dots, e_n) : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \rangle = 0$, d'où :

$\| \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \|^2 = \langle \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \rangle = 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$: la famille (x_1, \dots, x_p) est liée.

2. Une famille est libre si et seulement si elle n'est pas liée.

On vient donc de démontrer, à la numérotation des vecteurs près, qu'une sous-famille de (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si la sous-famille correspondante de (z_1, \dots, z_n) est libre et donc si et seulement si la sous-famille correspondante de (y_1, \dots, y_n) l'est également, puisque $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$ et donc les calculs sont les mêmes avec la famille (y_1, \dots, y_n) .

Ainsi les familles (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) ont le même rang et $\dim F = \dim G$.

Exercice 8.

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n .

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ donné et $P(X) = (X - \lambda)^k$, avec $1 \leq k \leq n$. Montrer que P est divisible par son polynôme dérivé P' .

b) Réciproquement, soit $P \in E$ divisible par son polynôme dérivé P' . Déterminer la forme de P .

2. Soit u l'application définie sur E par, pour tout $P \in E$:

$$u(P)(X) = (X^2 + 1)P'(X) - nXP(X)$$

a) Montrer que u est un endomorphisme de E .

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u .

c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution :

1. a) On a : $P' = k(X - \lambda)^{k-1}$ et P est divisible par P' , le quotient étant $\frac{1}{k}(X - \lambda)$.

b) Si P est divisible par P' , le quotient Q est du premier degré et $P = QP'$.

★ Si $\deg P = 1$, alors P' est un polynôme constant et on a bien P' qui divise P .

★ Supposons donc $n = \deg P \geq 2$, d'où $\deg P' = n - 1 \geq 1$, et soient z_1, z_2, \dots, z_k les racines de P' d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Comme P' est un facteur de P , les nombres z_1, z_2, \dots, z_k sont encore racines de P , donc d'ordres de multiplicité $\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_k + 1$.

Par conséquent $(\alpha_1 + 1) + \dots + (\alpha_k + 1) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k + k \leq n$, alors que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n - 1$. On en déduit $k \leq 1$ et comme $k \geq 1$, on a $k = 1$ et $\alpha_1 = n - 1$.

Ainsi P admet une unique racine à l'ordre n et est de la forme $\beta(X - \lambda)^n$.

2. a) La linéarité de u est évidente et pour $k \leq n$:

$$u(X^k) = (X^2 + 1)kX^{k-1} - nX^{k+1} = (k - n)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

★ Si $k < n$, $u(X^k)$ est de degré $k + 1$, donc appartient à E ;

★ si $k = n$, $u(X^n) = nX^{n-1} \in E$.

Ainsi, par linéarité, l'image par u de tout élément de E est encore un élément de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons d'ailleurs que si $\deg P < n$, alors $\deg u(P) = \deg P + 1$ et donc les éventuels polynômes propres sont de degré exactement n .

b) Soit λ une valeur propre (donc a priori complexe) de u et P un polynôme propre associé. On a :

$$u(P) = \lambda P, \text{ i.e. } (X^2 + 1)P'(X) = (nX + \lambda)P(X) \quad (*)$$

★ Si $nX + \lambda$ divise $X^2 + 1$, alors $\lambda = ni$ ou $\lambda = -ni$.

• Si $\lambda = -ni$, il reste $(X + i)P'(X) = nP(X)$, P' divise P et d'après la première question P est de degré n et admet $-i$ pour unique racine (car $-i$ est racine de P !) :

$$-ni \in \text{Spec } u \text{ et } E_{(-ni)}(u) = \text{Vect}((X + i)^n)$$

• De la même façon :

$$ni \in \text{Spec } u \text{ et } E_{(ni)}(u) = \text{Vect}((X - i)^n)$$

★ Si $nX + \lambda$ ne divise pas $X^2 + 1$, alors $(*)$ montre que i et $-i$ sont racines de P et P est divisible par $X^2 + 1$. Désignons alors par k , avec $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ le plus grand entier tel que $(X^2 + 1)^k$ divise P :

$$P(X) = (X^2 + 1)^k Q(X), \text{ avec } Q(i) \neq 0 \text{ ou } Q(-i) \neq 0$$

La relation $(*)$ devient : $(X^2 + 1)Q'(X) = [(n - 2k)X + \lambda]Q(X)$.

• Si $Q(i) \neq 0$ alors $\lambda = -(n - 2k)i$ et $(X + i)Q'(X) = (n - 2k)Q(X)$. On déduit alors de la première question que $-i$ est l'unique racine de Q , cette racine étant d'ordre $n - 2k$:

$$-(n - 2k)i \in \text{Spec } u \text{ et } E_{(-(n-2k)i)}(u) = \text{Vect}((X^2 + 1)^k (X + i)^{n-2k})$$

• Si $Q(-i) \neq 0$, on obtient de même :

$$(n - 2k)i \in \text{Spec } u \text{ et } E_{((n-2k)i)}(u) = \text{Vect}((X^2 + 1)^k (X - i)^{n-2k})$$

c) Finalement les valeurs propres de u sont $-ni, -(n - 2)i, \dots, (n - 2)i, ni$, donc sont au nombre de $n + 1$. Comme E est de dimension $n + 1$, on en déduit que u est diagonalisable.

Exercice 9.

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note tA la matrice transposée de A .

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^p , on pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^p x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne de x .

Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p , on note E^\perp l'orthogonal de E .

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\text{Im}(A) \subset [\text{Ker}({}^tA)]^\perp$.
- Montrer que $[\text{Im}(A)]^\perp \subset \text{Ker}({}^tA)$.
- En déduire que $\text{Im}(A) = [\text{Ker}({}^tA)]^\perp$.

2. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le noyau de tA .
- Montrer que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme : $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \text{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \text{Im}({}^tA)$.

On pose alors $x'' = u(x)$. Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de \mathbb{R}^p . Déterminer la matrice B associée à u dans la base canonique de \mathbb{R}^p .

- Montrer que AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A .
- Calculer BA . Que constatez-vous ?

3. Reprendre la construction et les calculs précédents pour une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Solution :

1. Notons par une même lettre un vecteur de \mathbb{R}^p et la matrice colonne canoniquement associée.

- Soit $y \in \text{Im} A$, il existe $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $y = Ax$. Si u est un vecteur quelconque de $\text{Ker } {}^tA$ on a : $\langle y, u \rangle = \langle Ax, u \rangle = {}^t(Ax)u = {}^t x {}^t A u = \langle x, {}^t A u \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$. Donc $y \in [\text{Ker } {}^tA]^\perp$ et :

$$\boxed{\text{Im}(A) \subset [\text{Ker}({}^tA)]^\perp}$$

b) Soit $x \in [\text{Im} A]^\perp$, on a pour tout vecteur y de \mathbb{R}^p : $\langle x, Ay \rangle = 0$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, $\langle {}^tAx, y \rangle = 0$ et tAy est orthogonal à \mathbb{R}^p et est donc le vecteur nul, i.e. $y \in \text{Ker}({}^tA)$:

$$\boxed{[\text{Im}(A)]^\perp \subset \text{Ker}({}^tA)}$$

c) Le résultat b) donne, par passage à l'orthogonal : $[\text{Ker}({}^tA)]^\perp \subset \text{Im}(A)$ et grce à a) :

$$\boxed{\text{Im}(A) = [\text{Ker}({}^tA)]^\perp}$$

2. a) tA est clairement de rang $p - 1$, donc son noyau est de dimension 1. La première colonne de tA étant nulle, son noyau est la droite engendrée par le premier vecteur de la base canonique (e_1, \dots, e_p) de \mathbb{R}^p . Son image est engendrée par les vecteurs colonnes de tA , donc en fait par e_1, e_2, \dots, e_{p-1} .

b) Soit $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$. Pour $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a : $Ae_i = \frac{1}{i} e_{i+1}$ et donc :

$$x = x_1 e_1 + \sum_{i=2}^p x_i e_i = x_1 e_1 + A \left(\sum_{i=1}^{p-1} i x_{i+1} e_i \right)$$

On a bien $x' = x_1 e_1 \in \text{Ker}({}^tA)$ et $x'' = \sum_{i=1}^{p-1} i x_{i+1} e_i \in \text{Im}({}^tA)$.

L'application $x \mapsto x''$ est clairement linéaire et :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & p-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AB = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$, qui est bien la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im} A = \text{Vect}(e_2, \dots, e_p)$.

d) De même $BA = \text{diag}(1, \dots, 1, 0)$ qui est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = \text{Im}({}^tA) = (\text{Ker} A)^\perp$.

3. Si A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

D'après 1. on a $\mathbb{R}^p = \text{Ker}({}^tA) \oplus \text{Im}(A) = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}({}^tA)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. On peut écrire $x = x' + Ay$, avec $x' \in \text{Ker}({}^tA)$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

Le vecteur y s'écrit $y = u + x''$, avec $u \in \text{Ker} A$ et $x'' \in \text{Im}({}^tA)$.

On obtient donc $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \text{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \text{Im}({}^tA)$.

Si $x = x' + Ax'' = x'_1 + Ax''_1$ sont deux telles décompositions, on a :

$$x'_1 - x' = A(x'' - x''_1)$$

D'où $x'_1 - x_1 = 0$, car $\text{Ker}({}^tA)$ et $\text{Im } A$ sont supplémentaires, donc d'intersection réduite au vecteur nul.

Ainsi $x'' - x'_1 \in \text{Ker } A$ et comme ce vecteur appartient aussi à $\text{Im}({}^tA) = [\text{Ker } A]^\perp$, il s'agit du vecteur nul.

Finalement la décomposition est bien unique et u est bien une application. La linéarité de u est évidente.

Par construction : $ABx = AB(x' + Ax'') = Ax'' = p_{\text{Im } A}(x)$, donc $AB = P_{\text{Im } A}$.

D'autre part, $x = y' + y''$, avec $y' \in \text{Ker } A$ et $y'' \in \text{Im}({}^tA)$. On en tire : $BAx = BAy'' = y'' = p_{\text{Im}({}^tA)}(x)$, soit $BA = P_{\text{Im } {}^tA}$.

Exercice 10.

Soit E l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant :

$$P(X)P(X+1) = -P(X^2) \quad (*)$$

1. Trouver les polynômes constants vérifiant la relation (*).
2. On suppose désormais que $P \in E$ a un degré supérieur ou égal à 1.
 - a) Soit α une racine (éventuellement complexe) de P . Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, α^{2^p} est également racine de P . Que peut-on conclure sur le module de α ?
 - b) Montrer que si α est racine de P , alors $(\alpha - 1)^2$ est également racine de P .
 - c) Quelles sont les racines possibles de P ?
 - d) Montrer que P est de la forme $P(X) = -X^n(X-1)^n$, avec $n \geq 1$.
3. a) Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) La famille des polynômes $([X^n(X-1)^n]^{(n)})_{n \geq 1}$ est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

(On rappelle que $S^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme S)

Solution :

1. Si P est un polynôme constant C la relation (*) est équivalente à $C^2 + C = 0$, soit $C = 0$ ou $C = -1$.
2. a) Supposons que $P(\alpha) = 0$. La relation (*) entraîne alors que $P(\alpha^2) = 0$, donc en itérant ce processus, $P(\alpha^4) = 0$, et par une récurrence immédiate $P(\alpha^{2^p}) = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$. En effet, P admettant un nombre fini de racines distinctes, il existe $p > q$ tels que $\alpha^{2^p} = \alpha^{2^q}$ soit $\alpha = 0$ ou $\alpha^{2^p-2^q} = 1$, ce qui entraîne $|\alpha| = 1$.

b) Utilisons la relation (*) avec $0 = P(\alpha - 1)P(\alpha) + P((\alpha - 1)^2)$, ce qui entraîne que $(\alpha - 1)^2$ est racine de P . En appliquant la question 2.a, il vient $\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$

En conclusion, si $P(\alpha) = 0$, alors :

$$\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ ou } \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ \text{et} \\ |\alpha - 1| = 1 \end{cases}$$

c) La troisième condition se réécrit $|e^{it} - 1| = 1$, avec $t \in [0, 2\pi[$. Or :

$$e^{it} - 1 = e^{it/2}(2i \sin \frac{t}{2}) \text{ et donc } |e^{it} - 1| = 2 \sin \frac{t}{2}$$

et :

$$|e^{it} - 1| = 1 \implies \sin(t/2) = 1/2, \text{ soit } t = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Par suite $\alpha = -j$ ou $\alpha = -j^2$.

L'ensemble des racines **possibles** de P est donc $S = \{0, 1, -j, -j^2\}$. Or si $-j$ est racine, $(-j)^2 = j^2$ également, ce qui n'est pas le cas. De même avec $-j^2$. Ainsi :

$$S \subset \{0, 1\}$$

d) Ainsi, P est de la forme $P(X) = \lambda X^p(X - 1)^q$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $p, q \in \mathbb{N}$.

Écrivons alors la relation (*) pour un tel polynôme :

$$\lambda^2 X^p(X - 1)^q(X + 1)^p X^q + \lambda X^{2p}(X^2 - 1)^q = 0$$

ou :

$$X^p(X - 1)^q [\lambda(X + 1)^p X^q + X^p(X + 1)^q] = 0$$

donc :

$$\lambda(X + 1)^p X^q + X^p(X + 1)^q = 0$$

Comme les termes de degré $(p + q)$ doivent se simplifier, il vient $\lambda = -1$, puis en substituant à X la valeur 1 : $2^q = 2^p$, soit $p = q$.

Réciproquement les polynômes de la forme $-X^n(X - 1)^n$ sont solutions de (*).

3. a) C'est quasiment une question de cours.

b) Soit pour tout $n \geq 1$, $P_n(X) = X^n(X - 1)^n$. C'est un polynôme de degré $2n$, et 0, 1 sont des racines de multiplicité n .

Soit $n > m$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n^{(n)}(t) P_m^{(m)}(t) dt &= [P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m)}(t)]_0^1 - \int_0^1 P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m+1)}(t) dt \\ &= - \int_0^1 P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m+1)}(t) dt \end{aligned}$$

car 0 et 1 sont des racines de $P_n^{(n-1)}(t)$. En recommençant ce processus n fois, on obtient :

$$\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_m^{(m)}(t) dt = (-1)^n \int_0^1 P_n(t)P_m^{(m+n)}(t) dt = 0,$$
 puisque $P_m^{(m+n)}$ est le polynôme nul.

La famille donnée est donc orthogonale pour ce produit scalaire. Par contre elle n'est pas orthonormée, car :

$$\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n (2n)! \int_0^1 t^n (t-1)^n dt$$

Notons $I(p, q) = \int_0^1 t^p (t-1)^q dt$. Une intégration par parties donne :

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (t-1)^{q-1} dt = -\frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

Donc :

$$I(p, q) = (-1)^q \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \cdots \times \frac{1}{p+q} I(p+q, 0) = (-1)^q \frac{q! p!}{(p+q+1)!}$$

Donc :

$$\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_n^{(n)}(t) dt = (2n)! \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(n!)^2}{2n+1} \neq 1$$

Exercice 11.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que :

$$\text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$$

($g|_{\text{Im}(f)}$ désignant la restriction de g à l'image de f).

2. En déduire :

a) $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)).$

b) $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(E).$

($\text{rg}(u)$ désignant le rang d'un endomorphisme u de E).

Solution :

1. On a :

$$x \in \text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) \iff x \in \text{Im}(f) \text{ et } g|_{\text{Im}(f)} = 0 \iff x \in \text{Im}(f) \text{ et } g(x) = 0$$

Donc :

$$\boxed{\text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)}$$

2. a) On a : $\text{rg}(g \circ f) = \dim[g(f(E))] = \dim(\text{Im}(g|_{\text{Im}(f)})) = \text{rg}(g|_{\text{Im}(f)}).$

Par le théorème du rang, appliqué à $g|_{\text{Im}(f)}$, il vient :

$$\boxed{\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} f - \dim(\operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Im}(f)})) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f))}$$

b) Comme $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker} g$ on a :

$$\dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)) \leq \dim(\operatorname{Ker} g) = \dim E - \operatorname{rg}(g)$$

ce qui donne, en remplaçant, le résultat demandé :

$$\boxed{\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(E)}$$

Exercice 12.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

A tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction :

$$\varphi(P) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(x+t) dt$$

1. a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$P(b) = \sum_{k=0}^{+\infty} (b-a)^k \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction polynôme dérivée P' .

2. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on explicitera, telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n(P)$$

(D^n désignant l'itéré $n^{\text{ème}}$ de D , i.e. $D^0 = \operatorname{Id}$, $D^2 = D \circ D, \dots$).

Déterminer la valeur des (a_n) en fonction de n et de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

3. Quels sont les éléments propres de φ ?

Solution :

1. a) La série se trouvant dans le membre de droite de l'égalité est en fait une somme finie, puisque si p est le degré de P , alors pour tout $k \geq p+1$, $P^{(k)}(a) = 0$.

La formule demandée n'est en fait rien d'autre que la formule de Taylor pour les polynômes, formule qui est exacte, si son ordre est suffisamment grand.

b) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(x+t) dt$ existe pour tout x réel. En effet, l'application $t \mapsto e^{-t^2} P(x+t)$ est continue sur \mathbb{R} et $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t^2} P(x+t) = 0$ entraîne la convergence de l'intégrale.

En utilisant la question précédente, il vient :

$$\varphi(P)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k P^{(k)}(x)}{k!} dt$$

et comme la somme est finie :

$$\varphi(P)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{t^k}{k!} dt$$

ce qui montre que $\varphi(P)$ est un polynôme.

La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

2. Par la question précédente, pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n dt$$

On remarque que $a_{2n+1} = 0$, par imparité de la fonction à intégrer. Quant à a_{2n} , il suffit d'utiliser une intégration par parties (à justifier avec soin !) pour obtenir pour tout $n \geq 0$:

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n} n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

3. Soit λ une valeur propre de φ ; il existe un polynôme P non nul de degré $p \geq 0$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$, qui se réécrit :

$$\sum_{n=0}^p a_n D^n(P) = \lambda P$$

Or pour tout n tel que $0 \leq n \leq p$, $\deg D^n(P) = p - n$ et $a_0 \neq 0$. Donc seul $D^0(P) = P$ est de degré p , les autres étant de degré strictement inférieur. Ainsi $\lambda = a_0$.

L'équation $\varphi(P) = \lambda P$ se réécrit :

$$\sum_{k=1}^p a_k P^{(k)}(x) = 0$$

Or la famille $(P'(x), \dots, P^{(p)}(x))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre et pour tout $k \geq 1$, $a_k = 0$, ce qui n'est pas vérifié.

La seule possibilité est que la sommation précédente n'existe pas, donc que le degré p de P soit nul, donc que P soit un polynôme constant.

Réciproquement tout polynôme constant est associé à la valeur propre a_0 .

Exercice 13.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer que

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (appelé aussi plan vectoriel) de \mathbb{R}^3 .

2. Soient P d'équation $ax + by + cz = 0$ et Q d'équation $ux + vy + wz = 0$ deux tels plans.

Montrer que $P = Q$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(u, v, w) = \lambda(a, b, c)$.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

4. Un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^3 est dit stable par f si $f(F) \subset F$.

Déterminer les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 stables par f .

Solution :

1. Soit φ l'application définie sur \mathbb{R}^3 par : $\varphi(x, y, z) = ax + by + cz$.

C'est une application linéaire non nulle (car $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) et à valeurs dans \mathbb{R} , donc φ est de rang 1, et, par le théorème du rang, $P = \text{Ker } \varphi$ est bien un sous-espace de \mathbb{R}^3 de dimension 2.

2. Si $(u, v, w) = \lambda(a, b, c)$, alors $ax + by + cz = 0 \iff ux + vy + wz = 0$ et $P = Q$.

Réciproquement supposons que l'on ait $P = Q$.

Quitte à changer les noms des coordonnées, on peut supposer que $a \neq 0$. Alors $ax + by + cz = 0 \iff x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z \iff (x, y, z) = y(-\frac{b}{a}, 1, 0) + z(-\frac{c}{a}, 0, 1)$

Les vecteurs $(-\frac{b}{a}, 1, 0)$ et $(-\frac{c}{a}, 0, 1)$, ou mieux $(b, -a, 0)$ et $(c, 0, -a)$ forment une base de P .

Si $P = Q$, ces vecteurs appartiennent aussi à Q et :

$$\begin{cases} ub - av = 0 \\ uc - aw = 0 \end{cases}, \text{ soit : } (u, v, w) = \frac{u}{a}(a, b, c).$$

3. La méthode du pivot de Gauss montre que les valeurs propres de A sont -1 et 3 . La résolution des systèmes $AX = \lambda X$ donne ensuite :

$$E_{(-1)}(f) = \text{Vect}(1, -1, 0) \text{ et } E_{(3)}(f) = \text{Vect}(1, 1, 0)$$

4. ★ Trivialement, $\{0\}$ est le seul sous-espace stable de dimension 0, et \mathbb{R}^3 est le seul sous-espace stable de dimension 3.

★ Soit D une droite et v un vecteur directeur de D .

On a : $f(D) \subset D \iff f(v) \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(v) = \lambda v$.

Ainsi une droite est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f . Il existe donc deux droites stables par f :

$$E_{(-1)}(f) = \text{Vect}(1, -1, 0) \text{ et } E_{(3)}(f) = \text{Vect}(1, 1, 0).$$

★ Soit P un plan stable, $ax + by + cz = 0$ une équation de P .

$(x, y, z) \in P \implies f(x, y, z) \in P$ s'écrit :

$$ax + by + cz = 0 \implies (a + 2b)x + (2a + b)y + (a + b + 3c)z = 0$$

On a $(a + 2b, 2a + b, a + b + 3c) \neq (0, 0, 0)$ et on peut appliquer les résultats de la question 2. Il existe donc $\lambda \neq 0$ tel que :

$$\begin{cases} a + 2b = \lambda a \\ 2a + b = \lambda b \\ a + b + 3c = \lambda c \end{cases}$$

ce qui se réécrit : ${}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de tA . Un calcul immédiat montre que tA

a les mêmes valeurs propres que A et que tA admet deux droites propres engendrées respectivement par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi A admet deux plans stables d'équation $z = 0$ et $x - y = 0$.

Exercice 14.

Dans cet exercice on confondra polynôme et fonction polynôme associée.

Soit u l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe $u(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) dt$$

1. Montrer que $u(P)$ est bien défini. Calculer $u(X^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u .

b) Soit v l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], v(P) = u(P)$

Montrer que v réalise un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelle est la matrice A associée à v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

3. Déterminer A^{-1} , l'inverse de A .

4. Si P est un polynôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$, montrer que, pour tout x réel :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} P^{(k)}(x) \geq 0$$

Solution :

1. Soit P un polynôme de degré p .

L'application $t \mapsto e^{-t}P(t)$ est continue sur \mathbb{R} ; de plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot e^{-t}P(t) = 0$ entraîne la convergence de l'intégrale définissant $u(P)(x)$.

La linéarité de P découle de la linéarité de l'intégrale.

Il est évident que $u(1) = 1$.

Soit $n \geq 1$. Une intégration par parties (d'abord sur un segment, suivie d'un passage à la limite) donne :

$$u(X^n) = X^n + nu(X^{n-1})$$

Ainsi, par récurrence :

$$u(X^n) = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \dots + n!$$

Ceci montre que $u(P)$ est une fonction polynomiale, quel que soit le polynôme P .

2. a) La stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ a été démontrée dans la question précédente, puisque pour tout $n \geq 0$, $u(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) Nous venons de montrer que v est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Toujours par la question 1. la famille $(u(1), u(X), \dots, u(X^n))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui montre que v est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

La matrice A est triangulaire supérieure de la forme $A = (a_{i,j})$, avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{j!}{i!} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

La diagonale de A n'est formée que de 1. La seule valeur propre de A est donc 1.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 1 sur la diagonale *i.e.* la matrice identité; elle serait donc égale à l'identité, ce qu'elle n'est pas.

3. Comme, pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, $u(X^k) = X^k + ku(X^{k-1})$, on a :

$$v^{-1}(X^k) = X^k - kX^{k-1}$$

ce qui entraîne que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$v^{-1}(P) = P - P'$$

On en déduit facilement la matrice A^{-1} , également triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux valant 1, la diagonale étant bordée d'une sur-diagonale formée des nombres $-1, -2, \dots, -n$.

4. Posons $Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P^{(k)}(x)$. On remarque qu'en fait cette somme est finie, ce qui montre l'existence du polynôme Q . On vérifie alors que $Q - Q' = P$,

donc que $P = v^{-1}(Q)$ ou $Q = v(P)$, ce qui donne, par la définition de u et la positivité de P , le résultat escompté.

Exercice 15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_{n^2}[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à n^2) tel que $P(A) = 0_n$.
2. On suppose $P(0) \neq 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et des coefficients de P .
3. On suppose que 0 est racine d'ordre k de P : il existe alors un polynôme Q tel que $Q(0) \neq 0$ et $P(X) = X^k Q(X)$.

Montrer que A est inversible si et seulement si $Q(A) = 0_n$.

Solution :

1. La famille $(I, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de cardinal $n^2 + 1$. C'est donc une famille liée et il existe une combinaison non triviale de ces matrices donnant 0_n , donc un polynôme P de degré inférieur ou égal à n^2 tel que $P(A) = 0_n$

2. Dire que $P(0) \neq 0$ signifie que dans la combinaison linéaire précédente le coefficient a_0 de I n'est pas nul, soit :

$$a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0_n, \text{ avec } a_0 \neq 0$$

donc :

$$I = -\frac{1}{a_0}(a_1 A + \dots + a_{n^2} A^{n^2}) = -\frac{1}{a_0}(a_1 I + a_2 A + \dots + a_{n^2} A^{n^2-1})A$$

On sait alors qu'il est inutile de vérifier l'inversibilité de l'autre côté et A est inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 I + a_2 A + \dots + a_{n^2} A^{n^2-1})}$$

3. On a : $A^k Q(A) = 0_n$, avec $Q(0) \neq 0$.

- si A est inversible, alors $Q(A) = 0_n$ (on multiplie k fois à gauche par A^{-1}).
- si $Q(A) = 0_n$, on est revenu à la situation de la question 2 et A est inversible.

Exercice 16.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4. On note 0 l'endomorphisme nul de E et I l'application identité de E .

On considère un endomorphisme u de E tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

On pose $E_1 = \text{Ker}(u^2 + u + I)$ et $E_2 = \text{Ker } u$.

1. Montrer que $\text{Im } u \subset E_1$ et que E_1 et E_2 sont stables par u .
2. Montrer que :
 - a) $E_1 \oplus E_2 = E$.
 - b) $E_1 = \text{Im } u$.
 - c) $E_2 = \text{Im}(u^2 + u + I)$.
3. a) Montrer que, pour tout vecteur non nul x de E_1 , la famille $(x, u(x))$ est libre.
 - b) Montrer que s'il existe deux vecteurs x et y de E_1 tels que la famille $(x, u(x), y, u(y))$ soit libre, alors la famille $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.
 - c) Quelles sont les dimensions possibles de E_1 ?

Solution :

On sait que pour tout $x \in E$:

$$(\star) \quad (u^3 + u^2 + u)(x) = u((u^2 + u + Id)(x)) = (u^2 + u + Id)(u(x)) = 0$$

1. Soit $y \in \text{Im } u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $(u^2 + u + I)(u(x)) = 0$, soit $y \in E_1$ et $\text{Im } u \subset E_1$.

★ Soit $x \in E_1$, (on a donc $(u^2 + u + Id)(x) = 0$).

Alors $(u^2 + u + I)(u(x)) = u((u^2 + u + Id)(x)) = 0$ et $u(x) \in E_1$.

★ Soit $x \in E_2$, (on a $u(x) = 0$). Alors $u(u(x)) = 0$ et $u(x) \in E_2$.

2. a) Soit $x \in E$. Le vecteur x s'écrit sous la forme

$$(x + u(x) + u^2(x)) + (-u(x) - u^2(x)) = y + z.$$

La relation (\star) entraîne que $y \in E_1$ et $z \in E_2$.

Enfin si $x \in E_1 \cap E_2$, alors :

$$u(x) = 0, (u^2 + u + Id)(x) \text{ et donc } x = Id(x) = 0$$

La somme précédente est donc directe et

$$\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$$

b) Le sous-espace vectoriel E_2 étant supplémentaire à $E_1 = \text{Ker } u$, sa dimension est celle de $\text{Im } u$. Mais E_1 contient $\text{Im } u$; on a donc $\boxed{E_2 = \text{Im } u}$.

c) La relation (\star) montre que $\text{Im}(u^2 + u + I) \subseteq E_2$. On conclut comme dans la question précédente en utilisant les dimensions de ces deux sous-espaces :

$$\boxed{\text{Im}(u^2 + u + I) = E_2}.$$

3. a) Supposons que la famille $(x, u(x))$ soit liée. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que λ est valeur propre réelle de u associée au vecteur propre x .

Mais $u^k(x) = \lambda^k x$, $k \geq 2$ entraîne que :

$$0 = (u^3 + u^2 + u)(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$$

Comme $x \neq 0$, il vient $\lambda = 0$ (car $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle).
Donc $u(x) = 0$ et $x = (u^2 + u + Id)(x) = 0$. D'où la contradiction et :

$$\boxed{(x, u(x)) \text{ est libre}}$$

b) Supposons que la famille $(x, u(x), y, u(y))$ soit liée. Il existe quatre scalaires a, b, c, d non tous nuls tels que $ax + bu(x) + cy + du(y) = 0$.

Comme $(x, u(x), y)$ est libre, d est non nul et quitte à diviser par d , on peut supposer $d = -1$, et :

il existe trois réels (a, b, c) non tous nuls tels que $u(y) = ax + bu(x) + c(y)$.

On a alors :

$$u^2(y) = (ac - b)x + (bc - b + a)u(x) + c^2y$$

et

$$0 = (u^2 + u + Id)(y) = (ac - b + a)x + (bc + a)u(x) + (c^2 + c + 1)y$$

en contradiction avec $(x, u(x), y)$ libre, puisque $c^2 + c + 1 \neq 0$.

c) Par la question précédente, si $\dim E_1 \geq 1$ alors $\dim E_1 \geq 2$ et si $\dim E_1 \geq 3$ alors $\dim E_1 \geq 4$. Les dimensions possibles de E_1 sont donc $\{0, 2, 4\}$.

Exercice 17.

Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser dans une base orthonormée.

b) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

2. Soit F l'application définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F : X \mapsto AX - XB$$

a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit U un vecteur colonne propre de A et V un vecteur colonne propre de B . Calculer $F(U \cdot {}^tV)$.

c) F est-elle un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

d) F est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. a) b) On peut évidemment chercher les éléments propres de A et B par la technique habituelle du pivot de Gauss. On peut aussi remarquer que :

$$\star A = -I + 2 \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = -I + 2J.$$

La matrice J vérifie $J^2 = J$, donc est une matrice de projecteur (non dégénéré). Ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre associé le plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z = 0$ et 1, de sous-espace propre associé la droite \mathcal{D} dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Par conséquent les valeurs propres de A sont -1 et 1 , avec :

$$E_{(-1)}(A) = \mathcal{P}; E_{(1)}(A) = \mathcal{D}$$

\star On a $B^2 = B$, donc B représente aussi un projecteur (non dégénéré) et ses valeurs propres sont 0 et 1, avec :

$$E_{(0)}(B) = \text{Ker } B \text{ est la droite } \mathcal{D}' \text{ dirigée par } (1, -2, 1);$$

$$E_{(1)}(B) \text{ est le plan } \mathcal{P}' \text{ d'équation } x - 2y + z = 0.$$

Comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}'$, les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, -2, 1)$ sont propres à la fois pour A et B et on complète avec le vecteur $(1, 0, -1)$ qui appartient à $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ce qui donne une base orthogonale propre à la fois pour A et B .

$$\text{En normant ces vecteurs, on prend donc : } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \boxed{P^{-1}AP = \text{diag}(-1, -1, 1); P^{-1}BP = \text{diag}(0, 1, 1)}$$

2. a) Il est clair que pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F(X) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La linéarité de F résulte de la distributivité du produit sur l'addition.

b) Si $AU = \lambda U$ et $BV = \mu V$, alors $U^tV \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^tVB = \mu^tV$ (car B est symétrique), d'où :

$$\boxed{F(U^tV) = AU^tV - U^tVB = \lambda U^tV - \mu U^tV = (\lambda - \mu)U^tV}$$

Ainsi cette matrice est vecteur propre de F associée à la valeur propre $\lambda - \mu$.

c) La valeur propre 1 étant commune à A et B , F admet 0 comme valeur propre et n'est donc pas inversible.

d) A et B admettent une base orthonormée commune de vecteurs propres (U_1, U_2, U_3) . Par la question précédente, les 9 matrices $U_i^tU_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$) sont des vecteurs propres de F .

Montrons qu'elles forment une famille libre.

Supposons que $\sum_{1 \leq i, j \leq 3} \lambda_{i,j} U_i^t U_j = 0$. En multipliant à droite par U_k et en

remarquant que la famille est orthonormée (donc ${}^tU_k U_k = \|U_k\|^2 = 1$ et ${}^tU_j U_k = 0$ lorsque $k \neq j$), il vient :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,k} U_i = 0$$

ce qui entraîne par la liberté de (U_1, U_2, U_3) que $\lambda_{i,k} = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$, et ceci quel que soit k tel que $1 \leq k \leq 3$.

La liberté est bien acquise et l'endomorphisme F est donc diagonalisable.

Exercice 18.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contient que des 0 sauf en position (i, j) où se trouve un 1.

On rappelle que les n^2 matrices $E_{i,j}$ forment une base de E . Enfin, on note I la matrice identité.

1. a) Trouver une matrice de E non nulle et non inversible.
b) Trouver une droite de E qui ne contient aucune matrice inversible.
2. Soit j un entier de $\{1, 2, \dots, n^2 - n\}$. Trouver un sous-espace vectoriel de E de dimension j qui ne contient aucune matrice inversible.
3. a) Calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
b) Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n^2 - 1$. Construire une application linéaire non nulle f de E dans \mathbb{R} telle que $\text{Ker } f = H$.

c) Tout élément $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrivant sous la forme $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} E_{i,j}$, on note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $X_{i,j}$ l'application de E dans \mathbb{R} définie par $X_{i,j}(A) = \alpha_{i,j}$.

Soit f une application linéaire de E dans \mathbb{R} . Montrer qu'il existe n^2 réels $(a_{i,j})$ tels que $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} X_{i,j}$.

d) Dans cette question seulement, on fait l'hypothèse que $i \neq j$ implique que $a_{i,j} = 0$. Montrer que la matrice $M = E_{n,1} + \sum_{i=2}^n E_{i,i-1}$ est élément de H et qu'elle est inversible.

e) Dans le cas où l'hypothèse faite en d) n'est pas vérifiée, montrer que, pour un couple (i, j) à préciser, la matrice $N = I - \frac{f(I)}{a_{i,j}} E_{i,j}$ est dans H et que N est inversible.
Qu'en conclure ?

Solution :

1. a) Toute matrice $E_{i,j}$ est non nulle et non inversible puisque de rang 1.
b) Le sous-espace vectoriel engendré par $E_{i,j}$ est une droite. Tout élément de ce sous-espace est de la forme $\lambda E_{i,j}$ (λ réel), et est non inversible.

2. Soit F le sous-espace de E formé des matrices dont la dernière colonne ne comporte que des zéros. Cet espace est engendré par les matrices $E_{i,j}$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$. Il est de dimension $n(n-1)$ et ne contient aucune matrice inversible.

Pour $j \in \llbracket 1, n^2 - n \rrbracket$, tout espace engendré par j matrices choisies parmi les matrices précédentes est de dimension j et ne contient *a fortiori* aucune matrice inversible.

3. a) C'est une question de cours : $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, où δ est le symbole de Kronecker, i.e. $\delta_{j,k}$ vaut 0 si $j \neq k$ et 1 si $j = k$.

b) Soit $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2-1})$ une base de H , que l'on complète avec un vecteur M_{n^2} pour obtenir une base de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par le théorème fondamental de l'algèbre linéaire il existe une application linéaire f et une seule de E dans \mathbb{R} telle que : $f(M_{n^2}) = 1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n^2 - 1 \rrbracket, f(M_i) = 0$.

Par construction même H est inclus dans $\text{Ker } f$ et comme f est non nulle, $\text{Ker } f$ n'est pas E tout entier. Donc :

$$\boxed{H = \text{Ker } f}$$

c) $X_{i,j}$ est bien une application linéaire de E dans \mathbb{R} (elle associe à toute matrice A , son terme d'indices (i, j)).

On sait que $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = n^2$.

La famille $(X_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est une famille de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de cardinal n^2 .

C'est une famille libre, car si $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} X_{i,j} = 0$, alors $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} X_{i,j}(E_{k,\ell}) = 0$, ce qui se réduit à $\alpha_{k,\ell} = 0$.

C'est donc une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et f se décompose sur cette base.

d) L'application f définie dans la question 3. a) vérifie ici $f = \sum_{i=1}^n a_{i,i} X_{i,i}$.

Donc :

$$f(M) = f(E_{n,1} + \sum_{i=2}^n E_{i,i-1}) = 0 + 0 = 0$$

et $M \in H$.

La matrice M est inversible, car elle représente un endomorphisme de permutation; en effet, si l'on note (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice associée dans cette base est M , alors :

$$\varphi(e_1) = e_n, \text{ et } \forall i \geq 2, \varphi(e_i) = e_{i-1}$$

On montre alors facilement que $\varphi^n = Id$, donc $M^n = I$ et l'inverse de M est M^{n-1} .

e) Choisissons un couple (i, j) tel que $i \neq j$ et $a_{i,j} \neq 0$.

On a alors $f(N) = f(I) - \frac{f(I)}{a_{i,j}} f(E_{i,j}) = f(I) - f(I) = 0$ et $N \in H$.

La matrice N est trigonale sans terme diagonal nul, donc est inversible.

En conclusion, tout sous-espace de E de dimension $n^2 - 1$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 19.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul donné.

On se place dans l'espace vectoriel E_n des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la forme $f : x \mapsto e^x.P(x)$, où P est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (donc de $\mathbb{R}_n[X]$).

1. Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer qu'il est de dimension finie. En donner une base.

2. Soit Δ l'opérateur de dérivation défini sur E_n par, pour tout $f \in E_n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f'(x)$$

où f' désigne la dérivée de f .

Montrer que Δ est un automorphisme de E_n .

3. a) Montrer qu'il existe une unique fonction h de E_n telle que $\Delta^{n+1}(h) = g$, avec $g : x \mapsto e^x.x^n$ (on ne cherchera pas à expliciter h).

b) Déterminer, en fonction de h et de ses dérivées successives, les applications f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifiant :

$$D^{n+1}(f) = g, \text{ et } f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$$

Où D désigne l'opérateur de dérivation sur l'ensemble des fonctions dérivables

4. Déterminer les éléments propres de Δ . Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Solution :

1. Par définition, E_n est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $e_i : x \mapsto e^x.x^i$, i décrivant $\llbracket 0, n \rrbracket$. Ces fonctions étant clairement des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , E_n est un sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et (e_0, e_1, \dots, e_n) en est un système générateur.

Enfin si $\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i$ est l'application nulle, alors, une exponentielle n'étant jamais

nulle, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0$ et tous les λ_i sont nuls.

(e_0, e_1, \dots, e_n) est libre, donc est une base de E_n qui est de dimension $n + 1$.

2. Δ est évidemment linéaire et si $f : x \mapsto e^x P(x)$, alors :

$$\Delta(f) : x \mapsto e^x (P(x) + P'(x))$$

Donc $\Delta(f) \in E_n$ et Δ est un endomorphisme de E_n .

Enfin, avec les notations précédentes : $f \in \text{Ker } \Delta \iff P + P' = 0 \iff P = 0$ et $\text{Ker } \Delta$ se réduit à la fonction nulle : Δ est injectif et puisque E_n est de dimension finie :

$$\Delta \in GL(E_n)$$

3. a) Δ étant un automorphisme de E_n , il en est de même de Δ^{n+1} et g admet un antécédent unique (dans E_n), par l'automorphisme Δ^{n+1} . On a d'ailleurs $h = \Delta^{-(n+1)}(g)$.

b) On cherche f sous la forme $f = h + \varphi$. Alors f convient si et seulement si :

$$D^{n+1}(\varphi) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varphi^{(k)}(0) = -h^{(k)}(0)$$

La première relation indique que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n et, par la formule de Taylor :

$$\varphi(x) = - \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

4. Soit λ une éventuelle valeur propre de Δ et f une fonction propre associée. La fonction f est de la forme $x \mapsto e^x P(x)$, où P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

$\Delta f = \lambda f$ s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x (P(x) + P'(x)) = \lambda e^x P(x)$, soit :

$$(\lambda - 1)P = P'$$

★ Si $\lambda = 1$, alors P est un polynôme constant ;

★ Si $\lambda \neq 1$, alors P est nécessairement le polynôme nul (sinon, P et P' auraient le même degré!)

En conclusion 1 est la seule valeur propre de Δ et $E_{(1)}(\Delta) = \text{Vect}(x \mapsto e^x)$.

Comme n est non nul, $\text{Vect}(x \mapsto e^x) \neq E_n$ et Δ n'est pas diagonalisable.

Exercice 20.

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Un endomorphisme D de E est appelé *dérivation* dans E s'il vérifie : pour tout $(p, q) \in E^2$, $D(pq) = D(p)q + pD(q)$.

On désigne par $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des dérivations dans E .

1. Soit D une dérivation dans E et $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, avec x réel. Déterminer $D(X)$.

2. Montrer que si $a \in E$ est donné, l'application D_a de E dans E définie par, pour tout $p \in E$:

$$D_a(p) = ap - pa$$

est une dérivation.

3. Montrer que $\mathcal{D}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4. Montrer que si D_1 et D_2 sont deux dérivations dans E , alors il en est de même de $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Solution :

1. Par linéarité de D : $D(X) = D(xI_2) = xD(I_2)$.

Or $D(I_2) = D(I_2I_2) = I_2D(I_2) + D(I_2)I_2 = 2D(I_2)$ et donc $D(I_2) = 0$, soit :

$$D(X) = 0$$

2. $\star D_a$ est linéaire de E dans E , car :

$$\begin{aligned} \forall p, q \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, D_a(p + \lambda q) &= a(p + \lambda q) - (p + \lambda q)a = ap - pa + \lambda(aq - qa) \\ &= D_a(p) + \lambda D_a(q) \end{aligned}$$

et $D_a(p)$ est bien une matrice carrée d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \star \forall p, q \in E, D_a(p)q + pD_a(q) &= (ap - pa)q + p(aq - qa) = a(pq) - (pq)a \\ &= D_a(pq) \end{aligned}$$

Donc D_a est une dérivation sur E .

3. L'application nulle est une dérivation sur E et on vérifie facilement que si D_1 et D_2 sont deux dérivations, alors pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, $D_1 + \lambda D_2$ est une dérivation. L'ensemble des dérivations est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4. $\star D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ est encore un endomorphisme de E (algèbre des endomorphismes).

\star Pour toutes matrices p et q de E :

$$\begin{aligned} (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(pq) &= (D_1 \circ D_2)(pq) - (D_2 \circ D_1)(pq) \\ &= D_1(D_2(p)q + pD_2(q)) - D_2(D_1(p)q + pD_1(q)) \\ &= D_1(D_2(p)q) + D_1(pD_2(q)) - D_2(D_1(p)q) - D_2(pD_1(q)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(p)q + D_2(p)D_1(q) + D_1(p)D_2(q) + p(D_1 \circ D_2)(q) \\ &\quad - (D_2 \circ D_1)(p)q - D_1(p)D_2(q) - D_2(p)D_1(q) - p(D_2 \circ D_1)(q) \end{aligned}$$

et il reste :

$$(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(pq) = (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(p)q + p(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(q)$$

Donc $(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)$ est encore une dérivation.

Exercice 21.

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 3$ et $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré strictement inférieur à n .

Soient a et b deux réels distincts.

1. a) Montrer que F_a, F_b et F définis ci-après, sont des sous-espaces vectoriels de E .

i) $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.

- ii) $F_b = \{P \in E/P(b) = 0\}$.
 iii) $F = \{P \in E/P(a) = P(b) = 0\}$.
 b) Montrer que la famille des polynômes :

$$((X - a), X(X - a), X^2(X - a), \dots, X^{n-2}(X - a))$$
 forme une base de F_a .
 c) Déterminer une base de F .
2. Soit u l'application de E dans E définie, pour tout $P \in E$ par :
- $$(u(P))(X) = P(a)X + P(b)$$
- a) Montrer que u est une application linéaire.
 b) Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
3. Montrer que $E = F_a + F_b$.

Solution :

1. a) $\varphi_a : P \mapsto P(a)$ est clairement une application linéaire de E dans \mathbb{R} et :
 $F_a = \text{Ker } \varphi_a$, $F_b = \text{Ker } \varphi_b$, $F = F_a \cap F_b$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

b) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ appartient à F_a si et seulement si a est racine de P , donc si et seulement si P est divisible par $(X - a)$, donc est de la forme $(X - a)Q$, avec $\deg Q \leq n - 2$. Ainsi :

$$P \in F_a \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}, P = \sum_{i=0}^{n-2} a_i (X - a) X^i$$

La famille proposée est donc génératrice de F_a . Comme elle est clairement libre (elle est à degrés échelonnés de 1 à $n - 1$) c'est une base de F_a .

b) De la même façon $((X - a)(X - b)X^i)_{0 \leq i \leq n-3}$ est une base de F .

2. a) Pour tous polynômes P, Q et tout scalaire λ :

$$\begin{aligned} u(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(a)X + (P + \lambda Q)(b) \\ &= P(a)X + P(b) + \lambda(Q(a)X + Q(b)) \\ &= u(P) + \lambda u(Q) \end{aligned}$$

b) $\star P \in \text{Ker } u \iff P(a)X + P(b) = 0 \iff P(a) = P(b) = 0 \iff P \in F$:
 $\text{Ker } u = F$

\star Comme $\dim \text{Ker } u = \dim F = n - 2$ et $\dim E = n$, par le théorème du rang, $\dim \text{Im } u = 2$. Or $\text{Im } u$ est clairement inclus dans $\mathbb{R}_1[X]$, donc :

$$\text{Im } u = \mathbb{R}_1[X]$$

3. $\dim(F_a + F_b) = \dim F_a + \dim F_b - \dim(F_a \cap F_b)$.

Or $\dim F_a = \dim F_b = n - 1$ et $\dim(F_a \cap F_b) = \dim F = n - 2$, donc :

$$\dim(F_a + F_b) = n = \dim E$$

L'inclusion $F_a + F_b \subset E$ étant banale, on conclut à l'égalité.

Exercice 22.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$) à coefficients complexes. On note S (respectivement A) le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques, (respectivement antisymétriques).

On rappelle que tM désigne la matrice transposée de la matrice M et I la matrice identité de E .

Soient (α, β) deux nombres complexes donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$:

$$f(M) = \alpha M + \beta {}^tM$$

1. Montrer que $E = S \oplus A$.
 2. Exprimer f à l'aide de p et q , où $q = I - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A .
 3. Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de I .
 4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E . Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de I .
 5. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β .
- En déduire la puissance $k^{\text{ème}}$ de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Solution :

1. ★ La matrice nulle est symétrique et toute combinaison linéaire de matrices symétriques est symétrique. Idem pour les matrices antisymétriques. Donc S et A sont des sous-espaces vectoriels de E .

★ Seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique : $S \cap A = \{0\}$.

★ Pour $M \in E$, on a : $M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$ et la première matrice est symétrique, la seconde antisymétrique : $E = S + A$.

Ainsi : $E = S \oplus A$

2. On a : $p(M) = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $q(M) = \frac{M - {}^tM}{2}$, donc :

$$M = p(M) + q(M), \quad {}^tM = p(M) - q(M)$$

Soit : $f(M) = \alpha(p(M) + q(M)) + \beta(p(M) - q(M))$:

$$f = (\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)q = (\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)(Id - p)$$

3. Comme $p^2 = p, q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$ (couple de projecteurs associés), on a : $f^2 = (\alpha + \beta)^2 p + (\alpha - \beta)^2 q = (\alpha + \beta)^2 p + (\alpha - \beta)^2 (Id - p)$

Ainsi :

$$\begin{cases} f = (\alpha - \beta)Id + 2\beta p \\ f^2 = (\alpha - \beta)^2 Id + 4\alpha\beta p \end{cases}$$

et, en éliminant p : $f^2 - 2\alpha f = (\beta^2 - \alpha^2)Id$.

4. ★ Si $\beta^2 \neq \alpha^2$, l'écriture précédente donne : $(f - \frac{2\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} Id) \circ f = Id$, ce qui prouve que f est un automorphisme et fournit f^{-1} .

★ Si $\beta = -\alpha$, alors $f(I) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

★ Si $\beta = \alpha$, alors pour n'importe quelle matrice M antisymétrique, on a $f(M) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

5. Par récurrence simple : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = (\alpha + \beta)^k p + (\alpha - \beta)^k q$.

Soit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f)$$

On a :

$$P = M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $A^k = M_{\mathcal{B}}(f^k) = (\alpha + \beta)^k P + (\alpha - \beta)^k Q$ et on explicite aisément les coefficients de A^k .

Exercice 23.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On considère une liste $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ de réels deux à deux distincts et l'on définit une application ϕ de E^2 dans \mathbb{R} par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \phi(P, Q) = \sum_{k=1}^{n+1} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur E^2 .

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E formée de polynômes P_k tels que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le degré de P_k soit égal à k et dont le terme de degré k soit positif.

Solution :

1. ϕ est évidemment bilinéaire et symétrique.

$\forall P \in E, \phi(P, P) = \sum_{k=1}^{n+1} P^2(a_k) \geq 0$ et cette expression n'est nulle que si P admet a_1, \dots, a_{n+1} pour zéros. Comme P est de degré inférieur ou égal à n , ceci ne peut se produire que pour $P = 0$.

ϕ est un produit scalaire

2. Il suffit d'appliquer à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E , et à ce produit scalaire, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 24.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) un système de vecteurs unitaires tels que, pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que (e_1, e_2, \dots, e_n) est un système orthonormal.
2. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$, x un vecteur de E et y sa projection orthogonale sur F . Montrer que $x = y$.
3. En déduire que (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

Solution :

1. On applique la relation pour chaque $x = e_j$:

$$\|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_j, e_k \rangle^2, \text{ d'où : } \sum_{k=1, k \neq j}^n \langle e_j, e_k \rangle^2 = 0.$$

Par conséquent : $\forall j \neq k, \langle e_j, e_k \rangle = 0$ et la famille, qui est normée, est bien orthonormée.

2. On a $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ et donc $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle x, e_i \rangle = \|x\|^2$.

De même $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2$.

On en déduit : $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 0$ et $x = y$.

3. La projection orthogonale sur F est l'identité, par conséquent $F = E$ et la famille (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Soit a un réel fixé. On considère, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'application f_k définie sur E_n par :

$$f_k(P) = P^{(k)}(a)$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P .

1. Montrer que f_k est une application linéaire de E_n dans \mathbb{R} .
2. On pose, pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_j(X) = (X - a)^j$. Pour tout k et pour tout j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $f_k(Q_j)$.
3. En déduire que (f_0, f_1, \dots, f_n) est une base de $\mathcal{L}(E_n, \mathbb{R})$.
4. Soit b un réel différent de a et m un entier tel que $0 \leq m \leq n$.
On définit l'application g de E_n dans \mathbb{R} par $g(P) = P^{(m)}(b)$.
Montrer que g est linéaire et donner les coordonnées de g dans la base (f_0, \dots, f_n) .

Solution :

1. L'application f_k est bien définie sur E_n (une fonction polynôme est indéfiniment dérivable) et à valeurs dans \mathbb{R} . La linéarité de f_k n'est autre que la linéarité de la dérivation.

2. Si $j \neq k$, $f_k(Q_j) = 0$ (si $k > j$, alors $Q_j^{(k)}$ est le polynôme nul et si $k < j$, $Q_j^{(k)}$ contient encore le facteur $X - a$)
Tandis que pour $j = k$, il vient $f_k(Q_k) = k!$.

3. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$, on a donc en particulier :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(Q_j) = 0, \text{ i.e. } \lambda_j j! = 0$$

Ainsi tous les coefficients λ_j sont nuls et la famille (f_0, \dots, f_n) est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme cet espace est de même dimension que E , à savoir $n + 1$, il s'agit d'une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

4. On applique la formule de Taylor (exacte!) au polynôme $P^{(m)}$:

$$P^{(m)}(b) = P^{(m)}(a) + \frac{b-a}{1!} P^{(m+1)}(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-m}}{(n-m)!} P^{(n)}(a)$$

Les coordonnées de g sont donc :

$$\left(0, \dots, 0, 1, b-a, \dots, \frac{(b-a)^{n-m}}{(n-m)!} \right)$$

Les $m - 1$ premières coordonnées étant nulles.

Exercice 26.

Soit $n \geq 2$ un entier naturel et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n - 1)$. Soit T l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $Q = T(P)$ défini par :

$$Q(X) = P(X) + \frac{1-X}{n}P'(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P .

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Donner la matrice associée à T dans la base canonique de E .
3. Montrer que T admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.
4. a) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_n .
b) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k .
Montrer que $P(1) = 0$.
On pose alors $P(X) = (X-1)^r R(X)$, avec $r \geq 1$ et $R(1) \neq 0$.
Préciser le degré de R .
5. On considère la suite de polynômes définie par $U_1(X) = X^{n-1}$ et, pour tout $j \geq 1$, par la relation :

$$U_{j+1}(X) = T(U_j)(X).$$

- a) Montrer que :

$$U_1(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (X-1)^k$$

- b) En déduire l'expression de $U_j(X)$ en fonction de $1, X-1, \dots, (X-1)^{n-1}$, ceci pour tout $j \geq 2$.

Exercice 27.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E . Soit :

$$L(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = 0\}$$

Montrer que $L(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Solution :

On a $u \circ v = 0 \iff \text{Im } v \subset \text{Ker } u \iff v$ est en fait une application linéaire de E dans $\text{Ker } u$.

Par conséquent $L(u)$ est isomorphe (voire égal) à $\mathcal{L}(E, \text{Ker } u)$, et donc :

$$\dim L(u) = \dim E \times \dim \text{Ker } u = n(n - \text{rg } u)$$

Exercice 28.

On considère deux entiers n et p tels que $2 \leq p \leq n$ et $E = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de \mathbb{C}^n . On considère I l'application identité de E et p éléments distincts non nuls (f_1, f_2, \dots, f_p) de E vérifiant :

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = I, \quad \text{et } f_i \circ f_j = 0, \quad \text{pour tout } i \neq j$$

Soient p nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ deux à deux distincts et f l'endomorphisme :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \dots + \alpha_p f_p$$

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, f_i est un projecteur de \mathbb{C}^n . Qu'en déduit-on pour \mathbb{C}^n relativement à $\text{Im } f_i$ et $\text{Ker } f_i$?

2. Pour k entier naturel, calculer f^k .

3. Montrer que (f_1, f_2, \dots, f_p) est une famille libre de E .

4. Montrer que les seules valeurs propres de f sont les complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et que, si l'on note E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre α_i , on a :

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$$

5. Montrer que la famille $(I, f, f^2, \dots, f^{p-1})$ est libre dans E . En déduire que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe un polynôme P_i de $\mathbb{C}[X]$, de degré inférieur ou égal à $(p-1)$, tel que $f_i = P_i(f)$ et que l'on a $P_i(\alpha_i) = 1$ et $P_i(\alpha_j) = 0$ pour $j \neq i$. En déduire l'expression de P_i .

Solution :

1. Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq n$. On peut écrire :

$$f_i = f_i \circ \sum_{k=1}^p f_k = \sum_{k=1}^p (f_i \circ f_k) = f_i^2$$

ce qui signifie que f_i est un projecteur de \mathbb{C}^n . On sait alors que :

$$\boxed{\mathbb{C}^n = \text{Im } f_i \oplus \text{ker } f_i}$$

2. Utilisons la question précédente :

$$f^2 = \sum_{j=1}^p \alpha_j f_j \circ \sum_{j=1}^p \alpha_j f_j = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \alpha_j \alpha_k f_j \circ f_k = \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 f_j^2 = \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 f_j$$

On montre ensuite par récurrence que pour tout $k \geq 2$,

$$\boxed{f^k = \sum_{j=1}^p \alpha_j^k f_j}$$

3. Écrivons que : $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \dots + \alpha_p f_p = 0$.

Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$

$$0 = f_i \circ f = \alpha_i f_i^2 = \alpha_i f_i$$

On conclut en remarquant qu'aucun des endomorphismes f_i n'est identiquement nul : $\forall i, \alpha_i = 0$, et :

$$\boxed{(f_1, \dots, f_p) \text{ est une famille libre}}$$

4. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, α_i est valeur propre de f , car si x_i est un élément de $\text{Im } f_i$, alors $x_i = f_i(x_i)$ et :

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^p \alpha_k f_k(f_i(x_i)) = \alpha_i f_i(x_i) = \alpha_i x_i$$

Nous venons en fait de montrer que α_i est valeur propre de f , de sous-espace propre associé contenant $\text{Im } f_i$.

Mais la relation $f_1 + f_2 + \dots + f_p = Id$, donne, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$x = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x)$$

ce qui signifie que $\mathbb{C}^n = \text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 + \dots + \text{Im } f_p$.

A fortiori, on a $\mathbb{C}^n = E_1 + \dots + E_p$ et comme cette somme est directe (somme de sous-espaces propres) :

$$\boxed{\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p}$$

Les seules valeurs propres de f sont ainsi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$.

5. Écrivons que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$a_0 x + a_1 f(x) + \dots + a_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$$

Pour $x = x_i$ vecteur propre de f associé à la valeur propre α_i , il vient :

$$\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k \alpha_i^k \right) x_i = 0$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ est de degré $(k-1)$ et admet k racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$: il s'agit du polynôme nul, et tous les a_k sont nuls.

La famille $(Id, f, f^2, \dots, f^{p-1})$ est libre et incluse dans $\text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

Donc :

$$\text{Vect}(Id, f, f^2, \dots, f^{p-1}) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, f_i est combinaison linéaire des éléments de la famille $(Id, f, f^2, \dots, f^{p-1})$, soit :

$$f_i = P_i(f) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} f^j$$

Or si $x \in \text{Im } f_i$:

$$\alpha_i x = f_i(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} f^j(x) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} \alpha_i^j \right) x \text{ et } P_i(\alpha_i) = 1$$

et si $x \in \text{Im } f_j$, avec $j \neq i$:

$$0 = f_i(x) = P_i(\alpha_j) x \text{ et } P_i(\alpha_j) = 0$$

Le polynôme P_i n'est autre que le polynôme interpolateur de Lagrange aux points $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, soit :

$$\boxed{P_i(X) = \frac{\prod_{j \neq i} (X - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}}$$

Exercice 29.

On définit les polynômes $(G_k)_{k \geq 0}$ par :

$$\begin{cases} G_0(X) = 1, G_1(X) = X \\ G_k(X) = \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)}{k!}, \text{ pour } k \geq 2 \end{cases}$$

1. a) Établir, pour tout entier $k \geq 1$, la relation :

$$G_k(X+1) - G_k(X) = G_{k-1}(X)$$

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $G_k(p) \in \mathbb{Z}$.

2. a) Que dire de la famille $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$?

b) Soit Q un polynôme quelconque de degré n . Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i) pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $Q(p) \in \mathbb{Z}$

ii) il existe des entiers relatifs a_0, a_1, \dots, a_n tels que : $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k G_k(X)$

(On pourra procéder par récurrence sur n et considérer le polynôme :

$$P(X) = Q(X+1) - Q(X).$$

3. Soit f une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

a) Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n a_k G_k(x)$$

soit nulle lorsque x est égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, \dots, n$.

b) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite ainsi associée à la fonction $x \mapsto f(x) = b^x$ est $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((b-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. a) On vérifie immédiatement que $G_1(X+1) - G_1(X) = G_0(X)$.

Si $k \geq 2$, alors :

$$\begin{aligned} G_k(X+1) - G_k(X) &= \frac{X(X-1)\dots(X-k+2)}{k!} [(X+1) - (X-k+1)] \\ &= G_{k-1}(X) \end{aligned}$$

b) • si $p \geq k$, alors $G_k(p) = C_p^k \in \mathbb{N}$.

• si $0 \leq p < k$, alors $G_k(p) = 0$.

• si $p < 0$, alors :

$$G_k(p) = (-1)^k \frac{(-p+k+1)\dots(-p+1)(-p)}{k!} = (-1)^k C_{-p+k+1}^k \in \mathbb{Z}$$

2. a) On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, G_k est un polynôme de degré k . Ainsi la famille (G_0, G_1, \dots, G_n) est une famille formée de polynômes échelonnés en degrés, depuis 0 jusqu'à n , donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Il est évident que ii) \Rightarrow i) par la question 1. b).

Démontrons l'implication contraire par récurrence sur le degré de Q :

★ L'implication réciproque est vérifiée pour tout polynôme Q de degré 0 (polynôme constant).

★ Supposons la réciproque montrée pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par la question 2.a), tout polynôme Q de degré n s'écrit sous la forme $Q = \sum_{k=0}^n a_k G_k(X)$, avec (a_k) réels. Soit alors :

$$P(X) = Q(X+1) - Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} G_k(X)$$

P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, qui vérifie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$P(p) = Q(p+1) - Q(p) \in \mathbb{Z} \text{ (hypothèse sur } Q)$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à P donne alors : pour tout k élément de $\{0, \dots, n-1\}$, $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$. Mais $a_0 = Q(0) \in \mathbb{Z}$ également et donc $Q(X)$ admet bien une décomposition de la forme annoncée.

On conclut par le principe de récurrence.

3. a) La condition demandée s'écrit sous forme d'un système triangulaire d'équations linéaires :

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_0 + a_1 \\ f(2) = a_0 + 2a_1 + a_2 \\ \vdots \\ f(n) = C_n^0 a_0 + \dots + C_n^k a_k + \dots + C_n^n a_n \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution (la matrice associée est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc sans terme diagonal nul), cette solution (a_0, \dots, a_n) ne dépendant que de $(f(0), \dots, f(n))$.

b) Les réels a_n vérifient :

$$f(p) = \sum_{k=0}^n a_k G_k(p) = \sum_{k=0}^p a_k C_p^k, \text{ pour } 0 \leq p \leq n$$

- pour $k=0$, il vient $a_0 = f(0) = (b-1)^0$.
- supposons que pour tout k tel que $0 \leq k \leq m-1$, $a_k = (b-1)^k$. Alors :

$$b^m = f(m) = \sum_{k=0}^m a_k C_m^k = \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k (b-1)^k + a_m$$

ce qui entraîne que $a_m = (b-1)^m$ par la formule du binôme de Newton. On conclut encore une fois par le principe de récurrence.

Exercice 30.

Soit a et b deux réels distincts.

On désire déterminer une solution de l'équation :

$$(E_n) \quad (X - a)^n A_n + (X - b)^n B_n = 1$$

d'inconnues A_n et B_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n - 1)$.

1. Montrer que si (E_n) admet un couple solution, celui-ci est unique.

2. On considère les ensembles :

$$F = \{(X - a)^n P / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} \quad \text{et} \quad G = \{(X - b)^n P / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$$

a) Vérifier que F et G sont des espaces vectoriels dont on précisera la dimension.

b) Déterminer $F \cap G$. En déduire la dimension de $F + G$.

c) En déduire que (E_n) admet une solution unique.

3. a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n dont on précisera le degré, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^x ((t - a)(t - b))^{n-1} dt = (x - a)^n P_n(x)$$

b) Etablir l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x - a)^n P_n(x) + (b - x)^n P_n(a + b - x) = (b - a)^n P_n(b).$$

c) Exprimer le couple solution de (E_n) en fonction du polynôme P_n .

Solution :

1. Supposons que (E_n) admette deux couples solutions (A_n, B_n) et (C_n, D_n) éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a alors :

$$(X - a)^n (A_n - C_n) = (X - b)^n (D_n - B_n)$$

Le réel a est alors racine d'ordre de multiplicité au moins n du polynôme $D_n - B_n$ ce qui entraîne que c'est le polynôme nul, puisqu'il est de degré inférieur ou égal à $(n - 1)$. De même $A_n = C_n$.

2.a) On vérifie aisément que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Une base de F est :

$$(X - a)^n, X(X - a)^n, \dots, X^{n-1}(X - a)^n$$

(c'est une famille libre et génératrice). Donc $\dim F = n$.

De même, une base de G est :

$$(X - b)^n, X(X - b)^n, \dots, X^{n-1}(X - b)^n$$

et $\dim G = n$.

b) Soit $Q \in F \cap G$. Il existe deux polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$Q = (X - a)^n P_1(X) = (X - b)^n P_2(X)$$

Une démonstration identique à celle de la question 1. montre que $P_1 = P_2 = 0$, donc $Q = 0$.

On en déduit que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G = 2n$. Or $F \oplus G \subset \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. L'égalité des dimensions implique que :

$$F \oplus G = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

c) En particulier, $1 \in F + G$; on déduit des questions précédentes l'existence d'une solution de (E_n) .

3. a) Posons $F(x) = \int_a^x ((t-a)(t-b))^{n-1} dt$. F est une fonction dérivable et pour tout x réel :

$$F'(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$$

F est donc une fonction polynomiale dont la dérivée admet a comme racine d'ordre $(n-1)$. Mais comme $F(a) = 0$, on peut donc conclure que a est racine d'ordre n de F .

b) Le changement de variable affine $u = a + b - t$ donne :

$$\begin{aligned} F(b+a-x) &= \int_a^{b+a-x} ((t-a)(t-b))^{n-1} dt = - \int_b^x ((a-u)(b-u))^{n-1} du \\ &= \int_x^b ((a-u)(b-u))^{n-1} du \end{aligned}$$

D'où :

$$F(x) + F(a+b-x) = \int_a^b ((t-a)(t-b))^{n-1} dt = F(b)$$

ce qui se traduit par :

$$(x-a)^n P_n(x) + (b-x)^n P_n(a+b-x) = (b-a)^n P_n(b)$$

c) Comme $(t-a)(t-b) < 0$ pour $t \in [a, b]$, le signe de $((t-a)(t-b))^{n-1}$ reste constant sur cet intervalle, ce qui entraîne que $F(b) \neq 0$ donc que $P_n(b) \neq 0$. En utilisant l'unicité de la solution de (E_n) , l'équation précédente se traduit par :

$$(x-a)^n \frac{P_n(x)}{(b-a)^n P_n(b)} + (b-x)^n \frac{P_n(a+b-x)}{(b-a)^n P_n(b)} = 1$$

donc :

$$A_n = \frac{P_n(X)}{(b-a)^n P_n(b)} \text{ et } B_n = \frac{P_n(a+b-X)}{(a-b)^n P_n(b)}$$

Remarque : On a $(X-a) - (X-b) = b-a$, donc :

$$[(X-a) - (X-b)]^{2n-1} = (b-a)^{2n-1}$$

En développant par la formule du binôme on obtient une expression de la forme :

$$(X-a)^n \alpha_n(X) + (b-X)^n \beta_n(X) = (b-a)^{2n-1}$$

où α_n et β_n sont des polynômes de degrés adéquats, il suffit alors de diviser par $(b-a)^{2n-1}$ pour obtenir une autre expression de A_n et B_n .

