2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

1. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et f, g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis dans la base canonique (i, j) par :

$$\begin{cases} f(i) = j \\ f(j) = i \end{cases} \text{ et } \begin{cases} g(i) = i \\ g(j) = -j \end{cases}$$

a) Montrer que f et g sont des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^2$.

b) Existe-t-il une base orthonormale qui diagonalise simultanément f et g ?

Dans la suite E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n et p un entier naturel non nul.

2. Soit $f_1, \dots, f_p$, p endomorphismes symétriques de E qui commutent deux à deux.

Dans cette question seulement on suppose en outre qu'il existe un réel λ tel que :

$$0 < \dim(\ker(f_1 - \lambda I)) < n$$

a) Montrer que, pour tout entier $j \in [\![1; n]\!]$, $\ker(f_1 - \lambda I)$ est stable par f_j.

b) Montrer que pour tout entier $j \in [\![1; n]\!]$, $[\ker(f_1 - \lambda I)]^{\perp}$ est stable par f_j.

3. a) La restriction d'un endomorphisme symétrique de E à un sous espace vectoriel F stable est-elle un endomorphisme symétrique de F ?

b) Soit $g_1, \dots, g_p$, p endomorphismes symétriques de E. Montrer qu'ils commutent deux à deux si et seulement si ils sont simultanément diagonalisables.

Solution :

1. a) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ étant une base orthonormée pour le produit scalaire canonique, on voit immédiatement que f et g sont des endomorphismes symétriques, leurs matrices associées dans la base (i, j) étant symétriques réelles.

b) S'il existe une base commune de diagonalisation de f et g, alors il existe une base commune de vecteurs propres de ces deux endomorphismes.
Or les vecteurs propres de g sont les vecteurs λi et μj, avec $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$, qui ne sont pas vecteurs propres de f.
Ainsi f et g ne sont pas «codiagonalisables»

2. a) Comme f_j commute avec f_1, il vient, si $x \in \operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)$:
$$(f_1 - \lambda I)\big(f_j(x)\big) = f_j\big((f_1 - \lambda I)(x)\big) = f_j(0) = 0,$$
ainsi $f_j(x) \in \operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)$.

b) Soit $z \in [\operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)]^{\perp}$. Alors pour tout $x \in \operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)$:
$$\langle f_j(z), x\rangle = \langle z, f_j(x)\rangle = 0$$
par la question précédente, donc $f_j(z) \in [\operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)]^{\perp}$.

3. a) La propriété d'être un endomorphisme symétrique est une propriété «universelle» liée au produit scalaire. La restriction d'un endomorphisme symétrique à un sous–espace stable reste donc un endomorphisme symétrique de ce sous–espace.

b) $\star$ Si les endomorphismes $g_1, \dots g_p$ sont simultanément diagonalisables, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice associée à chaque g_i est diagonale. Or deux matrices diagonales commutent ...

$\star$ Réciproquement, démontrons le résultat demandé par récurrence sur la dimension de E.

Si tous les g_i sont des homothéties, ils sont diagonalisables dans la base canonique de E.

Supposons que g_1 ne soit pas une homothétie. Il existe alors λ valeur propre de g_1 telle que $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(g_1 - \lambda I) < n$.
Notons $F = \operatorname{Ker}(g_1 - \lambda I)$. Le sous–espace F et son orthogonal $F^{\perp}$ sont stables par chaque $g_2, \dots, g_p$ et la restriction de chacun des ces endomorphismes symétriques à F et $F^{\perp}$ reste un endomorphisme symétrique.
Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à F et $F^{\perp}$: il existe des bases orthonormées de chacun de ces deux sous–espaces de E qui diagonalisent simultanément $g_1, \dots, g_p$. La concaténation de ces deux bases est une base orthonormée de E qui diagonalise simultanément $g_1, \dots, g_p$.

Exercice 2.2.

Soit n un entier naturel, tel que $n \geqslant 2$, et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Si A est la matrice de terme général $(a_{i,j})$, on appelle « trace » de A le nombre $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques (c'est-à-dire vérifiant ${}^tA = -A$).

On pose enfin, pour $(A, B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A.{}^tB)$.

1. Exprimer $\langle A, B\rangle$ en fonction des coefficients de A et de B, et montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire. On notera $||.||$ la norme associée.

2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

3. On suppose dans cette question $n = 3$ et on pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la distance de M à $S_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\inf\limits_{N \in S_3(\mathbb{R})} ||M - N||$.

4. Soit $H = \{M \in E \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension.

b) Soit $M \in H$. Calculer $\langle M, I_n\rangle$ (où I_n désigne la matrice identité d'ordre n).

c) Soit J la matrice de E dont tous les termes sont égaux à 1. Déterminer la distance de J à H.

Solution :

1. On a pour toutes matrices $A = (a_{i,j})$ et $b = (b_{i,j})$:

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

En convenant de confondre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$ (en mettant, par exemple, les lignes « bout à bout »), on reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ et la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour ce produit scalaire.
Notons que l'on a : $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$.

2. $\star$ Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$, on a :
$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB) = -\mathrm{tr}(AB)$; $\langle B, A\rangle = \mathrm{tr}(B^tA) = \mathrm{tr}(BA)$.

Or un calcul simple montre que, pour toutes matrices A et B : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on en déduit :

$$\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in A_n(\mathbb{R}), \langle A, B\rangle = 0$$

Ainsi, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$, qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont des sous-espaces orthogonaux.

$\star$ Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

La première matrice étant symétrique et la seconde antisymétrique, on en déduit :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$$

La conjonction de ces deux propriétés donne :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} A_n(\mathbb{R})$$

3. $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \min\limits_{N \in S_3(\mathbb{R})} \|M - N\| = \|M - p(M)\|$, où $p(M)$ est la projection orthogonale de M sur $S_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire où $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

Ainsi : $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|M - {}^tM\|$

Comme $M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, il vient $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7}$.

4. a) On vérifie facilement que l'application $\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Comme cette application est non nulle (on a $\varphi(I) = n$), son image est $\mathbb{R}$, qui est de dimension 1 et donc H, qui est son noyau, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

b) $\langle M, I_n\rangle = \mathrm{tr}(M) = 0$, *i.e.* $I_n \in H^{\perp}$ et $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

c) Soit q la projection orthogonale sur $H^{\perp}$, alors $d(J, H) = \|q(J)\|$.

Or $q(J) = \dfrac{\langle J, I_n\rangle}{\|I_n\|}\, I_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}}\, I_n$ et donc :

$$d(J, H) = \frac{n}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = n.$$

Exercice 2.3.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est un vecteur propre de ${}^tM$.
Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAX = 0$ entraîne ${}^tAMX = 0$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que M et ${}^tM$ ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M, $g \in \mathcal{L}(E)$ de matrice ${}^tM$ dans cette base.
Montrer que $u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ est un vecteur propre de g si et seulement si le plan d'équation P d'équation $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ est stable par f.

4. On pose $M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Donner les valeurs propres de M.

b) Donner toutes les droites stables par f.

c) Donner tous les plans stables par f.

Solution :

1. Soit λ la valeur propre associée, on a ${}^tAMX = {}^t({}^tMA)X = {}^t(\lambda A)X = \lambda{}^tAX$.
Ainsi si ${}^tAX = 0$, il vient $\lambda{}^tAX = 0$ et ${}^tAMX = 0$.

2. On sait que pour toute matrice M, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$. Ainsi $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible, si et seulement si ${}^t(M - \lambda I_3) = {}^tM - \lambda I_3$ n'est pas inversible, donc les valeurs propres sont les mêmes et ces deux matrices ayant alors le même rang, leurs noyaux sont de même dimension, donc les sous-espaces propres associés sont de même dimenson.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\star$ Si $u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ est un vecteur propre de g, A est un vecteur colonne propre de ${}^tM$, donc :

$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in P \implies {}^tAX = 0 \implies {}^tA(MX) = 0 \implies f(u) \in P$,
et P est stable par f.

$\star$ Si P est un plan stable par f, avec les mêmes notations, $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ et ${}^tAX = 0 \implies {}^tAMX = 0$. Notons alors ${}^tAM = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, on a :

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0 \implies b_1x + b_2y + b_3z = 0,$$

donc le système $\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$ n'est pas de rang 2 et la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc sa deuxième ligne est proportionnelle à sa première : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}, {}^tAM = \lambda{}^tA$, soit ${}^tMA = \lambda A$ et A est colonne propre de ${}^tM$.

4. a) $M-\lambda I_3=\begin{pmatrix}7-\lambda & 3 & -4\\ -6 & -2-\lambda & 5\\ 4 & 2 & -1-\lambda\end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow 4L_1-(7-\lambda)L_3\\ L_2\leftarrow 2L_2+3L_3}}{\sim}\begin{pmatrix}0 & -2+2\lambda & -9+6\lambda-\lambda^2\\ 0 & 2-2\lambda & 7-3\lambda\\ 4 & 2 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\sim}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda-2\\ 0 & 2-2\lambda & 7-3\lambda\\ 4 & 2 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

Si on veut la forme habituelle d'ue réduite de Gauus, il suffit de permuter alors les lignes L_1 et L_3. Comme $-\lambda^2+3\lambda-2=-(\lambda-1)(\lambda-2)$, les valeurs propres de M sont 1 et 2.

b) $\star$ Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est défini par le système :

$$\begin{cases} 0 &= 0\\ 4z &= 0\\ 4x+2y-2z &= 0\end{cases}$$

donc est la droite dirigée par le vecteur $(1,-2,0)$.

$\star$ Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est défini par le système :

$$\begin{cases} 0 &= 0\\ -2y+z &= 0\\ 4x+2y-3z &= 0\end{cases}$$

Ce qui donne $z=2y$ et $x=y$. Il s'agit de la droite engendrée par $(1,1,2)$.

Une droite stable étant engendrée par un vecteur propre, il n'existe que deux droites stables par f, à savoir les deux droites précédentes.

c) On sait déjà que les valeurs propres de ${}^tM$ sont 1 et 2.

On obtient $E_1({}^tM)=\text{Vect}\begin{pmatrix}-4\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $E_2({}^tM)=\text{Vect}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$

Ainsi il existe exactement deux plans stables par f, à savoir les plans d'équations respectives $4x+2y-3z=0$ et $2x+2y-z=0$.

Exercice 2.4.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$. On notera Id_E l'application identité de E et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit f un endomorphisme de E tel que $f\circ f=-Id_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.

2) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On considère une famille $(e_1,\ldots,e_p)$ de vecteurs de E. On suppose que la famille $(e_1,\ldots,e_p,f(e_1),\ldots,f(e_{p-1}))$ est libre. Montrer qu'alors la famille $(e_1,\ldots,e_p,f(e_1),\ldots,f(e_p))$ est libre.

3. Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et p vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ de E tels que la famille $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_p))$ soit une base de E.

Quelle est la matrice de f dans cette base ?

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2p}$.

a) Montrer que A ne possède aucune valeur propre réelle.

b) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c) Soit $B \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On suppose que A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

a) Calculer A^2.

b) Donner une base de $\mathbb{R}^4$ dans la quelle la matrice de f est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :

1. f est bijective et $f^{-1} = -f$, donc f est un automorphisme de E.

2. Supposons la famille $\big(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$ liée, alors par liberté de la famille des $2p-1$ premiers vecteurs, il existe une unique liste de scalaires telle que :

$$f(e_p) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k f(e_k)$$

et, en appliquant f :

$$-e_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k) - \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k e_k$$

ou encore : $\lambda_p f(e_p) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \mu_k e_k - e_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k f(e_k)$;

alors que : $\lambda_p f(e_p) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_p \lambda_k e_k + \lambda_p^2 e_p + \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_p \mu_k f(e_k)$

Par unicité de la décomposition de $f(e_p)$, on en déduit $\lambda_p^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

En conclusion $\big(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$ est une famille libre.

3. On initialise le processus avec un vecteur $e_1 \neq 0$ et $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est libre, ... Le processus s'arrête car E est de dimension finie. On obtient ainsi une base $\mathcal{B}$ du type demandé (donc n est pair de la forme $2p$) et :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = J = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

4. a) Soit λ une éventuelle valeur propre réelle de A et X une colonne propre associée.
On aurait donc $AX = \lambda X$ et $-X = A^2X = \lambda^2 X$, d'où $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$$

b) Proposons une méthode un peu plus inhabituelle :
A vérifie $(A - iI)(A + iI) = 0$, soit $(A - iI)(A - iI + 2iI) = 0$, ou encore :

$$(A - iI)^2 = -2i(A - iI)$$

Ainsi la matrice $B = -\dfrac{1}{2i}(A - iI)$ vérifie $B^2 = B$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puisque matrice de projecteur. La matrice A est alors diagonalisable, avec la même matrice de passage.

c) A et B sont semblables à la même matrice J, donc semblables entre elles.

5. a) On trouve $A^2 = -I_4$.

b) On prend $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $e_4 = Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ achève la détermination de $\mathcal{B}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = J$.

Exercice 2.5.

A tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ on associe $N(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big|P^{(k)}(k)\big|$.

1. a) Vérifier que $N(P)$ est bien défini pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que N vérifie :

(i) $\forall\, P \in \mathbb{R}[X], N(P) \geqslant 0$ et $N(P) = 0 \Longrightarrow P = 0$

(ii) $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda P) = |\lambda|.N(P)$

(iii) $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(1), ..., P^{(n)}(n)) \end{array}$

2. a) Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Donner sa matrice M dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Montrer que M est diagonalisable.

3. On suppose $n = 3$

a) Déterminer M^{-1}

b) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
Exprimer $P'(0)$ et $P''(0)$ en fonction de $P'(1)$, $P''(2)$ et $P^{(3)}(3)$.

Solution :

1. a) $N(P)$ est bien défini, car la sommation qui définit ce nombre est en fait finie (pour $k > \deg P, P^{(k)}(k) = 0$).

b) i) On a clairement $N(P) \geqslant 0$ et si P n'est pas la polynôme nul, notons k son degré. On a alors $P = a_k X^k + \cdots$, d'où $P^{(k)}(k) = k!a_k \neq 0$ et $N(P) > 0$. Ce qui donne le résultat par contraposée.

ii) et iii) résultent de la linéarité de la dérivation et des propriétés de la fonction « valeur absolue ».

2. a) φ est clairement linéaire et $P \in \operatorname{Ker}\varphi \implies N(P) = 0 \implies P = 0$, donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et φ est injectif.
Puisque $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, φ est donc un isomorphisme.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n! \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

b) Les valeurs propres de M sont en évidence : $1, 2, 3!, \dots, n!$ et sont au nombre de n.
Le sous-espace propre relatif à la valeur propre 1 est de dimension 2 et engendré par les matrices colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, donc M est diagonalisable.

3. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$.

b) On a $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{3} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ et :

$$M \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ \dfrac{P''(0)}{2} \\ \dfrac{P^{(3)}(0)}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(1) \\ P''(2) \\ P^{(3)}(3) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ \dfrac{P''(0)}{2} \\ \dfrac{P^{(3)}(0)}{6} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(1) \\ P''(2) \\ P^{(3)}(3) \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{cases} P'(0) = P'(1) - P''(2) + \frac{3}{2} P^{(3)}(3) \\ P''(0) = P''(2) - 2P^{(3)}(3) \end{cases}$$

Exercice 2.6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit L l'application définie sur E par

$$L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt$$

1. Montrer que L est une application linéaire. Déterminer son image et la dimension de son noyau. Donner une base de son noyau.

2. Pour tout λ réel non nul, on considère l'application T_λ définie sur E par

$$T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X$$

a) Montrer que T_λ est un endomorphisme de E.

b) Écrire la matrice associée à T_λ dans la base canonique de E.

c) Déterminer les valeurs propres de T_λ ainsi que son rang. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

d) Montrer que T_λ est bijective, déterminer T_λ^{-1}.

Solution :

1. L'application L est une forme (puisque pour tout $P \in E$, $L(P) \in \mathbb{R}$) linéaire par linéarité de l'intégrale. Son image est $\mathbb{R}$, car $L(1) = 2 \neq 0$ et par le théorème du rang, son noyau est de dimension n.

On remarque que tout polynôme impair est élément de $\operatorname{Ker} L$.
• si $n = 2p$, la famille $(X, X^3, \dots, X^{2p-1})$ est de cardinal p et ses éléments appartiennent à $\operatorname{Ker} L$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$L(X^{2k}) = \frac{2}{2k+1} \implies \frac{2k+1}{2}X^{2k} - \frac{2k-1}{2}X^{2k-2} \in \operatorname{Ker} L$$

La famille $\big(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}X^2, \dots, -\frac{2p-1}{2}X^{2p-2} + \frac{2p+1}{2}X^{2p}\big)$ est de cardinal p et ses éléments appartiennent à $\operatorname{Ker} L$.

L'« union » des deux familles est de cardinal $2p$ et forme une base du noyau de L (cette famille est libre, puisque ses éléments sont des polynômes de degrés échelonnés).

• si $n = 2p+1$, la famille $(X, X^3, \dots, X^{2p+1})$ est de cardinal $p+1$ et est formée d'éléments de $\operatorname{Ker} L$. La famille $\big(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}X^2, \dots, -\frac{2p-1}{2}X^{2p-2}+\frac{2p+1}{2}X^{2p}\big)$ est de cardinal p et formée d'éléments de $\operatorname{Ker} L$.

L'« union » des deux familles est de cardinal $2p+1$ et forme une base du noyau de L, puisque ses éléments sont des polynômes de degrés échelonnés.

(On peut évidemment faire d'autres choix...)

2. a) On vérifie immédiatement que T_λ est une application linéaire de E. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$T_\lambda(X^k) = \begin{cases} X^{2j} + \dfrac{2\lambda}{2j+1}X & \text{si } k = 2j \\ X^{2j+1} & \text{si } k = 2j+1 \end{cases}$$

b) La matrice associée à T_λ dans la base canonique de E s'en déduit immédiatement. Par exemple dans le cas où n est pair ($n = 2p$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \frac{2\lambda}{3} & \dots & \frac{2\lambda}{2p+1} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

c) Soit μ une valeur propre de T_λ et P un polynôme propre associé. On a alors :

$$T_\lambda(P) = \mu P \iff \lambda L(P)X = (\mu - 1)P$$

• si $P \in \operatorname{Ker} L$, alors $(\mu-1)P = 0$, donc $\mu = 1$.
Réciproquement, si $\mu = 1$, comme $\lambda \neq 0$, on a $P \in \operatorname{Ker} L$.
Ainsi $\mu = 1$ est valeur propre de T_λ, le sous–espace propre associé étant le noyau de L qui est de dimension n.

• si $\mu \neq 1$, alors $L(P) \neq 0$, et $P = \dfrac{\lambda L(P)}{\mu - 1}X$. Mais dans ce cas

$$L(P) = \frac{\lambda L(P)}{\mu - 1}L(X) = 0$$

C'est une contradiction.

Finalement, T_λ n'admet qu'une seule valeur propre $\mu = 1$. Le sous–espace propre associé n'étant pas E tout entier, l'endomorphisme T_λ n'est pas diagonalisable.

d) L'endomorphisme T_λ est bijectif, puisque 0 n'est pas une valeur propre. Comme $E = \mathrm{Vect}(1) \oplus \mathrm{Ker}\, L$ et comme $(T_\lambda - I)P = \lambda L(P)X$, il vient :

$$\begin{cases} (T_\lambda - I)_{|\,\mathrm{Ker}\, L} = 0 \\ (T_\lambda - I)(1) = 2\lambda X \end{cases} \Longrightarrow (T_\lambda - I)^2 = 0$$

Donc :

$$T_\lambda^2 - 2T_\lambda + I = 0 \text{ et } T_\lambda^{-1} = 2I - T_\lambda$$

Exercice 2.7.

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels. $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Soit m un entier naturel, et $q_0, q_1, \ldots, q_m$, $(m+1)$ nombres réels distincts.

1. Montrer que pour tout $j \in \{0, \ldots, m\}$ il existe un unique polynôme L_j de degré inférieur ou égal à m tel que

$$L_j(q_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_m)$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer l'expression de P dans cette base.

3. Déterminer l'ensemble suivant : $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall q \in \mathbb{Q}, P(q) \in \mathbb{Q}\}$.

4. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E diagonalisable.
Montrer qu'il existe k scalaires, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et k projecteurs de E, $p_1, \ldots, p_k$ vérifiant les trois propriétés :

i) pour tout $i \neq j, p_i \circ p_j = 0$

ii) $Id = p_1 + \cdots + p_k$, où Id représente l'endomorphisme identité

iii) $u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k$.

Solution :

1. Soit $j \in [\![0, m]\!]$. Définissons le polynôme L_j de degré m par

$$L_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{X - q_i}{q_j - q_i}$$

On a alors de façon évidente : $L_j(q_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

D'autre part, si P est un polynôme ayant les propriétés demandées, alors le polynôme $P-L_j$ s'annule en $q_0,\dots,q_m$ (y compris q_j), étant de degré inférieur ou égal à m, c'est le polynôme nul et $P = L_j$, ce qui montre l'unicité de la solution.

2. a) Les polynômes $L_0, L_1, \dots, L_m$ sont éléments de $\mathbb{R}_m[X]$ et le cardinal de la famille $(L_0, L_1, \dots, L_m)$ est $m+1$. Montrons qu'ils forment une famille libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k L_k = 0$. On a alors pour tout $j \in [\![0, m]\!]$:

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k L_k(q_j) = \lambda_j$$

Ainsi la famille est libre de cardinal ad hoc et formée d'éléments de $\mathbb{R}_m[X]$, donc est une base de cet espace.

b) Si l'on pose $P = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k L_k$, alors le raisonnement précédent montre que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$, $\lambda_j = P(q_j)$. Donc

$$P = \sum_{k=0}^{m} P(q_k) L_k$$

3. Montrons que $\mathcal{E} = \mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels.

- si $P \in \mathbb{Q}[X]$, alors pour tout $q \in \mathbb{Q}, P(q) \in \mathbb{Q}$.
- Réciproquement si $P \in \mathcal{E}$, on peut supposer P de degré m. On choisit alors $(m+1)$ nombres *rationnels* distincts $q_0, q_1, \dots, q_m$. La question précédente permet d'écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{m} P(q_k) L_k, \text{ avec } L_k \in \mathbb{Q}[X]$$

Donc $P \in \mathbb{Q}[X]$.

4. L'endomorphisme u étant diagonalisable, on peut écrire $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sont les valeurs propres distinctes de u et $(E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k})$ les sous-espaces propres associés.

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ permettent de définir k polynômes $L_1, \dots, L_k$ comme dans la première question. Posons alors, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$p_j = L_j(u) = \prod_{i \neq j} \frac{u - \lambda_i Id}{\lambda_j - \lambda_i}$$

Soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + \dots + x_k$, chaque x_i appartenant à E_{λ_i}. On a alors :

$$p_j(x) = L_j(u)(x_1 + \dots + x_k) = L_j(u)(x_j) = x_j$$

Cela montre que $p_j^2 = pj$ et que pour $k \neq j, p_j \circ p_k = 0$.

Enfin, par la question 2,

$$1 = \sum_{i=1}^{k} L_i \implies Id = \sum_{i=1}^{k} L_i(u) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$
$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i L_i \implies u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i L_i(u) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$$

Exercice 2.8.

Soit a un réel, $a \neq 1$, et p un entier naturel. On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à p. On pose :

$$S_{a,p} = \{u = (u_n)_{n\geqslant 0} \mid \exists P \in \mathbb{R}_p[X] \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\}$$

1. Soit $u \in S_{a,p}$.
Montrer l'unicité du polynôme P tel que $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = au_n + P(n)$.
(*on pourra utiliser la fonction* $\varphi : \mathbb{R}_p[X] \to \mathbb{R}^{p+1}$ *définie par :*

$$\varphi(P) = (P(0), P(1), \dots, P(p)) \text{ .)}$$

On notera P_u le polynôme ainsi défini. En déduire que $S_{a,p}$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

2. Soit $\theta : S_{a,p} \to \mathbb{R}_p[X]$ définie par $\theta(u) = P_u$. Montrer que θ est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker}\theta$ ainsi qu'une base de cet espace.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $R_k(X) = (X+1)^k - aX^k$.
   a) Montrer que la famille $(R_0, R_1, \dots, R_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
   b) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, $R_k \in \operatorname{Im}\theta$. En déduire $\operatorname{Im}\theta$.
   c) Quelle est la dimension de $S_{a,p}$?
   d) Déterminer une base de $S_{a,p}$.

4. Déterminer la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$u_0 = -2 \text{ et pour tout } n \geqslant 0, u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7.$$

Solution :

1. L'application φ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension $p+1$. Son noyau est réduit à $\{0\}$, car si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, le polynôme P de degré inférieur ou égal à p admet $(p+1)$ racines distinctes, donc est le polynôme nul.
L'application φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q définissant la suite $u \in S_{a,p}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) = Q(n)$ et en particulier $\varphi(P) = \varphi(Q)$, soit $P = Q$.

Enfin $S_{a,p}$ contient la suite nulle associée au polynôme nul et si $(u, v) \in S_{a,p}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + v \in S_{a,p}$ associée au polynôme $\lambda P_u + P_v$.

2. La linéarité de l'application θ a été démontrée dans la question précédente. Soit $u \in \operatorname{Ker}\theta$. Cela signifie que $P_u = 0$ donc que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison a et $u_n = a^n u_0$.

Réciproquement, si (u_n) est une suite géométrique de raison a, on a $u_{n+1} = au_n$ et $u \in S_{a,p}$ entraîne que $P_u = 0$.

Ainsi $\operatorname{Ker}\theta$ est la droite engendrée par la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. a) Comme $a \neq 1$, la famille $(R_0, \dots, R_p)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ de degrés échelonnés et de cardinal $(p+1)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

b) Soit $k \in [\![0,p]\!]$. La suite $x^{(k)}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n^{(k)} = n^k$, vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1}^{(k)} = ax_n^{(k)} + R_k(n) = ax_n^{(k)} + \big((n+1)^k - an^k\big)$$

Donc, pour tout $k \in [\![0,p]\!], R_k \in \operatorname{Im}\theta$ et $\operatorname{Im}\theta = \mathbb{R}_p[X]$.

c) Par le théorème du rang, il vient $\dim S_{a,p} = 1 + p + 1 = p + 2$.

d) Une base de $S_{a,p}$ est définie par $\big((a^n)_{n\in\mathbb{N}}, x^{(0)}, \dots, x^{(p)}\big)$. En effet, c'est une famille de cardinal $(p+2)$ qui est libre car si $\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k x^{(k)} + \mu(a^n) = 0$, alors en appliquant θ, il vient $\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k R_k = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, puis $\mu = 0$.

4. Appliquons les résultats précédents.
La suite cherchée est de la forme $n \mapsto \lambda a^n + \lambda_0 x_n^{(0)} + \lambda_1 x_n^{(1)}$.
En regardant les premières valeurs, il vient

$$\begin{cases} \lambda + \lambda_0 = -2 \\ 2\lambda + \lambda_0 + \lambda_1 = 3 \\ 4\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 = 11 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda_0 = -5 \\ \lambda_1 = 2 \end{cases}$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3.2^n + 2n - 5$$

Exercice 2.9.

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $u^2 = u \circ u = 0$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de u.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2. a) Comparer $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$. En déduire que $\operatorname{rg} u \leq 2$.

b) Montrer que si $\operatorname{rg} u = 1$, il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle u est représenté par une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que u est de rang égal à deux.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle u est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Existe-t-il un endomorphisme v de $\mathbb{R}^4$ tel que $v^2 = u$?

5. On note $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \,/\, u \circ v = v \circ u\}$ et

$$\mathcal{P}(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \,/\, \exists S \in \mathbb{R}[X],\ v = S(u)\}$$

a) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et en donner la dimension.

b) A-t-on $\mathcal{C}(u) = \mathcal{P}(u)$?

Solution :

1. a) Comme $u^2 = 0$, si λ est valeur propre de u, alors $\lambda^2 = 0$. Réciproquement, comme $u^2 = 0$, l'endomorphisme u n'est pas injectif et 0 est valeur propre de u. Finalement la seule valeur propre de u est 0.

b) L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable, car autrement on aurait $u = 0$.

2. a) Comme $u \circ u = 0$, on a $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Ker} u$. Le théorème du rang entraîne que $4 = \operatorname{rg}(u) + \dim \operatorname{Ker} u \geqslant 2\operatorname{rg}(u)$. D'où $\operatorname{rg}(u) \leqslant 2$.

b) Soit (y) une base de $\operatorname{Im} u$. Il existe $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $y = u(x)$. Comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, on complète (y) en (y, z, t) base de $\operatorname{Ker} u$. Alors (x, y, z, t) est une base de $\mathbb{R}^4$. En effet :

$ax + by + cz + dt = 0 \implies u(ax + by + cz + dt) = au(x) = ay = 0$, donc $a = 0$, puis $by + cz + dt = 0 \implies b = c = d = 0$.

La matrice associée à u dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dans le cas où $\operatorname{rg}(u) = 2$, on a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Soit (e_1, e_2) une base de $\operatorname{Ker} u$. Il existe e_3, e_4 tels que $u(e_3) = e_1, u(e_4) = e_2$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ (démonstration identique à celle de la question précédente) et la matrice associée à u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La réponse à cette question est positive. Par exemple l'endomorphisme v dont la matrice associée dans la base précédente est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
vérifie $v^2 = u$.

5. a) Si $(v, w) \in \mathcal{C}(u)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
$$(\lambda v + w) \circ u = \lambda(v \circ u) + (w \circ u) = \lambda(u \circ v) + (u \circ w) = u \circ (\lambda u + w)$$
Puisque $0 \in \mathcal{C}(u)$, l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ est non vide et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.
Pour déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$, on fait un calcul matriciel et on trouve l'ensemble des matrices de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$
avec (a, b, c, d, e, f, g, h) réels. Ainsi $\dim \mathcal{C}(u) = 8$.

b) Comme $u^2 = 0$, on voit immédiatement que $\mathcal{P}(u) = \mathrm{Vect}(Id, u)$ qui est de dimension 2. Donc $\mathcal{P}(u)$ est différent de $\mathcal{C}(u)$.

Exercice 2.10.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :
$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_1^j + \lambda_2^j + \cdots + \lambda_n^j = n$$
On se propose de déterminer les λ_k. Pour cela, on pose
$$S(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$
et on note p le nombre de racines distinctes de S et $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ l'ensemble des racines de S. Enfin, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note n_i l'ordre de multiplicité de la racine μ_i de S.

a) Montrer que la matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de terme général $m_{i,j} = \mu_j^{i-1}$ pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ est inversible.

b) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, donner la valeur de $\sum_{i=1}^{p} n_i \mu_i^j$.

c) On note $X = \begin{pmatrix} n_1(\mu_1 - 1) \\ \vdots \\ n_p(\mu_p - 1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Calculer MX.

d) Déduire de ce qui précède que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 1$.

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A.

a) Montrer que $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2\,, \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) En déduire que $\forall\,(A,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}), \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que pour tout $j \in [\![1,n]\!], \operatorname{tr}(A^j) = n$. Déterminer la matrice A.

Solution :

1. a) Montrons que les lignes $L_1,\dots,L_p$ de la matrice M sont linéairement indépendantes. Soit $(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i L_i = 0$.

Posons $R(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_p t^{p-1}$. On a alors

$$R(\mu_1) = R(\mu_2) = \cdots = R(\mu_p) = 0.$$

Le polynôme R de degré inférieur ou égal à $(p-1)$ admet p racines : c'est le polynôme nul et $a_1 = \cdots = a_p = 0$, d'où la conclusion.

b) On a : $S(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} (t-\lambda_k) = \prod\limits_{i=1}^{p} (t-\mu_i)^{n_i}$.

On a donc, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^j = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^j = n$.

Enfin $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^0 = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n = \deg(S)$.

c) Par différence, on déduit que pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^{j-1}(\mu_i - 1) = n - n = 0$, donc $MX = 0$.

d) La matrice M étant inversible, cela entraîne que $X = 0$, soit, pour tout $i \in [\![1,p]\!], n_i = 0$ ou $\mu_i = 1$.

Comme les n_i sont dans $\mathbb{N}^*$ et que les μ_i sont deux à deux distincts, ceci impose $p = 1, \mu_1 = 1$ et $n_1 = n$. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1,k]\!], \lambda_k = 1$.

2. a) Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}\right) = \operatorname{tr}(BA)$$

b) Si P est inversible, on peut écrire, par la question précédente :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$$

3. Il existe une matrice $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et P inversible telles que $P^{-1}AP = D$. On a alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^j = \operatorname{tr} D^j = \operatorname{tr}(PA^jP^{-1}) = \operatorname{tr} A^j = n.$$

Par la première question, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k = 1$ et $D = I$; donc :

$$A = PIP^{-1} = I.$$

Exercice 2.11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que pour tout endomorphisme f de E il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$. Ce polynôme est-il unique ?

b) Existe-t-il un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout f de $\mathcal{L}(E)$ on ait $P(f) = 0$?

2. Soit $(f, u) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f = \alpha.u$ et $f^2 = \alpha^2.u$.

a) Déterminer un polynôme annulateur simple de f.

b) Montrer que f est diagonalisable. *(pour $\alpha \neq 0$ on pourra pour un x donné, écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = -\dfrac{1}{\alpha}[f(x) - \alpha\, x]$ et $x_2 = \dfrac{1}{\alpha}f(x)$ et s'intéresser à $f(x_1)$ et $(f - \alpha.id_E)(x_2)$)*

c) Dans le cas où $\alpha \neq 0$, que peut-on dire de u ?

3. Soit $(f, u, v) \in \mathcal{L}(E)^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f = \alpha.u + \beta.v$, $f^2 = \alpha^2.u + \beta^2.v$ et $f^3 = \alpha^3.u + \beta^3.v$.

a) Calculer $f^3 - (\alpha+\beta)f^2 + \alpha\beta f$. Qu'en déduit-on pour les valeurs propres de f ?

b) Montrer que si l'on est dans un des trois cas suivants : $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta$, alors f est diagonalisable.

c) Si $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$ montrer que f est diagonalisable. On pourra procéder comme suit :

i) exprimer u et v en fonction de f ;

ii) montrer que u et v sont des projecteurs *(par exemple en calculant $u \circ (u - id_E)$)* tels que $u \circ v = v \circ u = 0$;

iii) montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$;

iv) montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$;

et conclure.

Solution :

1. On sait que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2. La famille $(I, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est donc liée ; il existe des scalaires $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2})$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0$$

et donc un polynôme P de degré inférieur ou égal à n^2 tel que $P(f) = 0$. Ce polynôme n'est pas unique puisque tout multiple de P est encore annulateur.

b) Supposons qu'il existe un polynôme P non nul tel que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $P(f) = 0$. Ce polynôme est de degré p et admet au plus p racines réelles ; soit α réel qui n'est pas racine de P ; alors $f = \alpha I$ ne peut être annulé par P, puisque $P(\alpha I) = P(\alpha)I \neq 0$.

2. a) Il est évident que $f^2 - \alpha f = 0$. Donc $P(X) = X^2 - \alpha X$ est annulateur de f. Les valeurs propres de f sont à prendre dans l'ensemble $\{0, \alpha\}$.

b) Si $\alpha = 0$, alors $f = 0$ est diagonal.

Supposons $\alpha \neq 0$. Écrivons :

$$x = x_1 + x_2, \text{ avec } x_1 = -\frac{1}{\alpha}\big(f(x) - \alpha x\big), \quad x_2 = \frac{1}{\alpha} f(x)$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} f(x_1) = -\dfrac{1}{\alpha}\big(f^2(x) - \alpha f(x)\big) = 0 \\ f(x_2) - \alpha x_2 = \dfrac{1}{\alpha}(f^2 - \alpha f)(x) = 0 \end{cases}$$

Ainsi $x_1 \in E_0(f) = \operatorname{Ker} f$, et $x_2 \in E_\alpha(f) = \operatorname{Ker}(f - \alpha I)$. Cela signifie que ces deux sous-espaces (qui sont en somme directe, puisque $E_0(f) \cap E_\alpha(f) = \{0\}$) sont supplémentaires et que f est diagonalisable.

c) Si $\alpha \neq 0$, alors $u = \dfrac{1}{\alpha} f$ vérifie $u^2 = u$, c'est–à–dire que u est un projecteur.

3. a) Un calcul élémentaire montre que $f^3 - (\alpha+\beta)f^2 + \alpha\beta f = 0$. Le polynôme $X(X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta)$ est annulateur de f.
Les valeurs propres de f sont à choisir dans $\{0, \alpha, \beta\}$.

b) Si $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta$, on est ramené à la question précédente, et f est diagonalisable.

c) Si $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$, il vient :

i) $\quad u = \dfrac{f^2 - \beta f}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad v = \dfrac{f^2 - \alpha f}{\beta(\beta - \alpha)}$.

ii) On a :

$$\begin{aligned} u^2 - u &= \frac{1}{(\alpha(\alpha-\beta))^2}\big(f \circ (f - \beta I) \circ (f^2 - \beta f - \alpha(\alpha - \beta)I\big) \\ &= \frac{1}{(\alpha(\alpha-\beta))^2} f \circ \big(f^3 - 2\beta f^2 - (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)f + \alpha\beta(\alpha-\beta)I\big) \\ &= \frac{1}{(\alpha(\alpha-\beta))^2}\big(f \circ [(\alpha-\beta)f^2 - (\alpha^2 - \beta^2)f + \alpha\beta(\alpha-\beta)I]\big) \\ &= \frac{1}{\alpha^2(\alpha-\beta)}\big(f^3 - (\alpha+\beta)f^2 + \alpha\beta f\big) = 0 \end{aligned}$$

L'endomorphisme u est donc un projecteur.
Une démonstration identique montre que v est également un projecteur.

De plus :

$$\begin{aligned} u \circ v = v \circ u &= \frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)^2}\left(f \circ (f-\alpha I) \circ f \circ (f-\beta I)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)^2} f \circ \left(f^3 - (\alpha+\beta)f^2 + \alpha\beta f\right) = 0 \end{aligned}$$

iii) Comme $f = \alpha u + \beta v$, on a $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} f$. Réciproquement, la question i) montre que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} v$. Finalement

$$\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} f.$$

Soit $x \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$, alors puisque u et v sont des projecteurs, $x = u(x) = v(x)$; donc $f^2(x) - \alpha f(x) = f^2(x) - \beta f(x)$ et comme $\alpha \neq \beta$, $f(x) = 0$ et $u(x) = v(x) = x = 0$.

De plus, comme, pour tout $x \in E$, $f(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$, et par la question i) $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} f$. Finalement

$$\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v = \operatorname{Im} f$$

iv) Finalement si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, il existe $y \in E$ tel que

$$x = f(y) = \alpha u(y) + \beta v(y).$$

Alors : $0 = f(x) = f^2(y) = \alpha^2 u(y) + \beta^2 v(y)$, donc avec la somme directe obtenue en iii), $u(y) = v(y) = 0$ et $x = 0$.

Par le théorème du rang, il vient :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$$

Il suffit maintenant de vérifier :

- si α est valeur propre de f, alors $\operatorname{Im} u = E_\alpha$,
- si β est valeur propre de f, alors $\operatorname{Im} v = E_\beta$,
- si 0 est valeur propre de f, alors $\operatorname{Ker} f = E_0$.

Quitte à supprimer éventuellement les sous–espaces réduits à $\{0\}$, on conclut que f est diagonalisable.

Exercice 2.12.

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On rappelle que, si u est un endomorphisme de E, un polynôme annulateur de u est un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme de E ayant un polynôme annulateur de degré 1 ?
Est-il possible qu'un endomorphisme de E ait un polynôme annulateur constant ?

2. Donner (par sa matrice canonique) un exemple d'endomorphisme h de E ayant $X(X-3)$ comme polynôme annulateur et n'ayant pas de polynôme annulateur de degré 1.

Que peut-on dire de $\dfrac{1}{3}\,h$?

3. Construire à partir de l'endomorphisme h proposé précédemment un endomorphisme g de E ayant $(X-1)(X-2)$ comme polynôme annulateur et n'ayant pas de polynôme annulateur de degré 1.
Préciser la matrice canonique de l'endomorphisme g. Que peut-on dire de $g - id_E$?

4. On considère un endomorphisme f de E ayant X^3-1 comme polynôme annulateur et n'ayant pas de polynôme annulateur de degré strictement inférieur à 3.
Montrer que 1 est nécessairement valeur propre de f et montrer que
$$1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f - id_E) \leqslant 2.$$
Montrer que $X(X-3)$ est un polynôme annulateur de $\phi = f^2 + f + id_E$.
Montrer que ϕ ne possède pas de polynôme annulateur de degré 1. Conclusion ?
Montrer que $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Ker}(f - id_E)$. En déduire que $\dfrac{1}{3}\,\phi$ projette sur $\operatorname{Ker}(f - id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - id_E)$.
Donner (par sa matrice canonique) l'exemple d'un tel endomorphisme f. *On pourra calculer $A^2 + A + I_2$, A étant la matrice* $\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}$.

5. Donner (par sa matrice canonique) un exemple d'endomorphisme non nul ψ de E ayant $X^2 + X + 1$ comme polynôme annulateur.
Pourquoi ψ ne peut-il pas avoir de polynôme annulateur de degré 1 ?

Solution :

1. Si $aX + b$ est annulateur de f, on a $af + bI = 0$, et comme $a \neq 0$, f est une homothétie. Réciproquement si $f = \lambda I$, f admet le polynôme λX comme polynôme annulateur.
Si $P = c$, avec $c \in \mathbb{R}^*$, alors $P(f) = cI \neq 0$.

2. On peut par exemple considérer l'endomorphisme h de E de matrice associée dans la base canonique :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
On vérifie aisément que $X(X-3)$ est annulateur de h, et que h n'étant pas une homothétie, n'admet pas de polynôme annulateur de degré 1.
L'endomorphisme $u = \dfrac{1}{3}\,h$ est annulé par $X(X-1)$. Donc $u^2 = u$ et u est un projecteur.

3. Il suffit de considérer $g = I + \frac{1}{3}\,h$, de matrice associée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De la même façon, $g - I$ est un projecteur de E.

4. On sait que $0 = f^3 - I = (f - I) \circ (f^2 + f + I)$. Si 1 n'est pas valeur propre de f, l'endomorphisme $f - I$ est inversible et $f^2 + f + I = 0$; ce résultat est en contradiction avec le fait que f n'admet pas de polynôme annulateur de degré strictement inférieur à 3.

Comme 1 est valeur propre de f, on sait que $\dim \operatorname{Ker}(f - I) \geqslant 1$.
Si $\dim \operatorname{Ker}(f - I) > 2$, on peut avoir :

- $\dim \operatorname{Ker}(f - I) = 4$. Dans ce cas, $f = I$ et $X - 1$ est annulateur de f.
- $\dim \operatorname{Ker}(f - I) = 3$. Dans ce cas, $f - I$ est de rang 1.

Si $\operatorname{Im}(f - I) \subset \operatorname{Ker}(f - I)$, on a $(f - I)^2 = 0$ et $(X - 1)^2$ est annulateur de f. Donc, comme $\operatorname{Im}(f - I)$ est une droite, on a $\operatorname{Im}(f - I) \cap \operatorname{Ker}(f - I) = \{0\}$, et le théorème du rang entraîne que $E = \operatorname{Ker}(f - I) \oplus \operatorname{Im}(f - I)$.
Soit u une base de $\operatorname{Im}(f - I)$. Il existe alors λ réel tel que $(f - I)u = \lambda u$, *i.e.* $f(u) = (\lambda + 1)u$.
Le polynôme $(X - 1)(X - \lambda - 1)$ est alors annulateur de f. Contradiction !

Calculons :

$$\begin{aligned} \phi \circ (\phi - 3I) &= (f^2 + f + I) \circ (f^2 + f - 2I) \\ &= (f^2 + f + I) \circ (f - I) \circ (f + 2I) \\ &= (f^3 - I) \circ (f + 2I) = 0 \end{aligned}$$

Donc, $X(X - 3)$ est un polynôme annulateur de ϕ. Si ϕ admettait un polynôme annulateur de degré 1, alors f possèderait un polynôme annulateur de degré 2, ce qui est exclu.

On a $\phi \circ \phi = 3\phi$, donc $\left(\frac{1}{3}\,\phi\right) \circ \left(\frac{1}{3}\,\phi\right) = \frac{1}{3}\,\phi$ et $\frac{1}{3}(f^2 + f + I)$ est un projecteur.

On sait que $\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{Ker}(f - I)$. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f - I)$ (ainsi $f(x) = x$). Alors $f^2(x) = x$ et $\phi(x) = 3x$. Donc $x = \frac{1}{3}\,\phi(x) \in \operatorname{Im} \phi$.
En conclusion $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Ker}(f - I)$.

On sait que $\operatorname{Im}(f - I) \subset \operatorname{Ker} \phi$. L'égalité précédente et le théorème du rang permettent de conclure que $\operatorname{Im}(f - I) = \operatorname{Ker} \phi$.
Ainsi $\frac{1}{3}\,\phi$ est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - I)$.

Comme $A^2 + A + I = 0$, on peut prendre :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Au vu de la question précédente, on peut prendre :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme ψ associé à cette matrice ne peut avoir un polynôme annulateur de degré 1, car $\psi^2 + \psi + I = 0$ entraîne que les valeurs propres de ψ sont complexes et non réelles.

Exercice 2.13.

Soit n un entier naturel, tel que $n \geqslant 2$.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$, il existe un unique polynôme $L_j \in E$ tel que

$$L_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, 0 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Montrer que l'on a :

$$L_j(X) = \frac{(-1)^{n-j}}{n!} \mathrm{C}_n^j \prod_{k=0, k\neq j}^{n} (X - k)$$

2. Montrer que $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de E.

3. Calculer

a) $L_0 + L_1 + \cdots + L_n$.

b) $L_1 + 2L_2 + \cdots + nL_n$.

4. On définit, pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E. On notera $||.||$ la norme associée à ce produit scalaire.

b) Que peut-on dire de $\mathcal{B}$ pour ce produit scalaire ?

5. On pose $H = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer un réel λ_k tel que $X^n + \lambda_k L_k \in H$.

6. Soit $P \in H$. Montrer que les coordonnées de P sur la base $\mathcal{B}$ sont

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^{n} P(j) j^n, \quad k \in [\![0, n]\!]$$

7. Soit π la projection orthogonale sur H. On pose

$$d(X^n, H) = ||X^n - \pi(X^n)||$$

a) Montrer que $||X^n - \pi(X^n)|| = n! \times ||L_0 - \pi(L_0)||$.

b) Soit $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} L_i$. Montrer que $Q \in H^\perp$.

c) En déduire que $d(X^n, H) = n! \dfrac{|\langle L_0, Q\rangle|}{||Q||}$.

d) Montrer que $d(X^n, H) = \dfrac{n!}{\sqrt{C_{2n}^n}}$.

Solution :

1. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, posons :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{X-k}{j-k} = \frac{(-1)^{n-j}\binom{n}{j}}{n!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (X-k)$$

On montre immédiatement que ce polynôme vérifie :

pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, $L_j(\ell) = \delta_{j,\ell}$.

Supposons qu'il existe un polynôme $Q_j \in E$ tel que pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, $L_j(\ell) = Q_j(\ell) = \delta_{j,\ell}$. Le polynôme $L_j - Q_j \in E$ admet $(n+1)$ racines (les entiers de 0 à n, j compris) : c'est le polynôme nul et $Q_j = L_j$.

2. Le cardinal de la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est égal à $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Montrons qu'elle est libre ; si $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$, alors, pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(\ell) = \alpha_\ell$$

Ainsi, tout polynôme P de E s'écrit dans cette base sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k(X)$$

3. a) D'après la remarque précédente, $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) = 1$, entraîne que $P = 1$.

b) De même $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) = k$ entraîne que $P(X) = X$.

4. a) On vérifie que l'application $\Phi : (P, Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive. Seule la dernière propriété n'est pas immédiate :

on a $\Phi(P, P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)^2 \geqslant 0$;

et si $\Phi(P,P)=0$, alors pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P(k)=0$, et $P=0$.

b) La famille $\mathcal{B}=(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthonormée de $(E,\langle\ ,\ \rangle)$, car pour tout $\ell\in[\![0,n]\!]$, $L_j(\ell)=\delta_{j,\ell}$, donc :

$$\langle L_i,L_j\rangle=\sum_{k=0}^{n}L_i(k)L_j(k)=\sum_{k=0}^{n}\delta_{i,k}\delta_{j,k}=\delta_{i,j}.$$

5. L_k est un polynôme de degré n ; on a $X^n+\lambda_kL_k\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si et seulement si le coefficient de X^n de ce dernier polynôme est nul ; donc si et seulement si :

$$\lambda_k=\frac{(-1)^{n-k+1}n!}{\binom{n}{k}}$$

6. Si $P\in H^{\perp}$, alors pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\langle P,X^n+\lambda_kL_k\rangle=0$, ou :

$$\langle P,X^n\rangle=-\lambda_k\langle P,L_k\rangle$$

Or on sait que dans la base orthonormée $(L_0,\dots,L_n)$, P s'écrit : $P=\sum_{k=0}^{n}\langle P,L_k\rangle L_k$.

Donc :

$$\langle P,L_k\rangle=-\frac{1}{\lambda_k}\langle P,X^n\rangle=\frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{n!}\sum_{j=0}^{n}P(j)j^n=\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\sum_{j=0}^{n}P(j)j^n$$

7. a) On sait que $X^n+(-1)^{n+1}L_0\in H$; donc :

$$\pi(X^n+(-1)^{n+1}L_0)=X^n+(-1)^{n+1}L_0$$

et

$$\pi(X^n)-X^n=(-1)^n n!\big(\pi(L_0)-L_0\big)\text{ donne }d(X^n,H)=n!d(L_0,H)$$

b) Le polynôme Q est colinéaire au polynôme P de la question 6. Donc $Q\in H^{\perp}$.

c) On a donc $d(L_0,H)=|\langle L_0,Q\rangle|$, d'où :

$$d(X^n,H)=n!\frac{|\langle L_0,Q\rangle|}{||Q||}.$$

d) Or $\langle L_0,Q\rangle=\dfrac{1}{n!}$ et $||Q||^2=\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{(n!)^2}\binom{n}{i}^2=\dfrac{1}{(n!)^2}\binom{2n}{n}$.

Finalement :

$$d(X^n,H)=\frac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}.$$

Exercice 2.14.

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle .,.\rangle$. On note $||.||$ la norme associée.

Soit u un vecteur unitaire $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On note D la droite vectorielle engendrée par u.
Soit a un réel non nul et f_a l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. a) Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$||f_{a_0}(x)|| = ||x||$$

b) Calculer $f_{a_0} \circ f_{a_0}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f_{a_0} + Id) \oplus \mathrm{Ker}(f_{a_0} - Id) = \mathbb{R}^3$.

3. On revient au cas général où a est quelconque.

a) Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les éléments propres de f_a.

4. On suppose dans cette question que $a \neq -1$. On note M_a la matrice associée à f_a dans la base $\mathcal{B}$ et on définit une fonction h_a sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$h_a(x, y, z) = {}^t X M_a X, \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que h_a possède un unique point critique que l'on déterminera.

b) Déterminer les extremums de h_a.

Solution :

1. On vérifie de manière immédiate la linéarité de f_a, ainsi que le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^3, f_a(x) \in \mathbb{R}^3$.

2. a) Comme u est un vecteur unitaire :

$$||f_a(x)||^2 = ||x||^2 + 2a\langle x, u\rangle^2 + a^2\langle x, u\rangle^2.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$||f_a(x)||^2 = ||x||^2 \iff (2a + a^2)\langle x, u\rangle^2 = 0$$

et ceci est vrai pour tout x si et seulement si $a = -2$.

b) On sait que comme $||u|| = 1$, $\langle x, u\rangle u$ est la projection orthogonale $p(x)$ de x sur la droite vectorielle de base u. Donc $f_a = I + ap$.
Ici $f_{-2} = I - 2p$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$.
Donc $f_{-2}^2 = I$.

Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ s'écrit : $x = \frac{1}{2}\big(x + f_{-2}(x)\big) + \frac{1}{2}\big(x - f_{-2}(x)\big)$.

Comme $(f_{-2} - I) \circ (f_{-2} + I) = 0$, on a : $x + f_{-2}(x) \in \mathrm{Ker}(f_{-2} - I)$ et $x - f_{-2}(x) \in \mathrm{Ker}(f_{-2} + I)$; enfin $\mathrm{Ker}(f_{-2} - I) \cap \mathrm{Ker}(f_{-2} + I) = \{0\}$, parce que $[f_{-2}(x) = x \text{ et } f_{-2}(x) = -x] \implies x = 0$.

3. a) p étant un projecteur orthogonal, sa matrice dans une base orthonormée adéquate est diagonale, donc symétrique et $f_a = I + ap$ est un endomorphisme symétrique.

b) Il suffit d'écrire :

$$f_a(x) = \lambda x \iff ap(x) = (\lambda - 1)x \iff p(x) = \frac{\lambda - 1}{a} x$$

Les valeurs propres d'un projecteur étant 0 et 1, les valeurs propres de f_a sont $a+1$ (le sous–espace propre associé étant $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}(u)$) et 1 (le sous–espace propre associé étant $\mathrm{Ker}\, p = u^{\perp}$).

4. Il existe une matrice orthogonale P orthogonale, telle que $M_a = {}^tPD_aP$ avec $D_a = \mathrm{diag}(a+1, 1, 1)$. Par suite

$$h_a(x, y, z) = {}^t(PX)D_aPX$$

En notant $PX = X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, il vient : $h_a(x, y, z) = (a+1)x'^2 + y'^2 + z'^2$.

- si $a + 1 > 0$, $h_a(x, y, z) \geqslant 0$ et $h_a(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x' = y' = z' = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x = y = z = 0$, puisque $X = P^{-1}X'$. Donc h_a admet un minimum global en $(0, 0, 0)$. Il est clair que h_a n'est par contre pas majorée.
- si $a + 1 < 0$, h_a n'est ni minorée (prendre $x'_n = n$ et $y'_n = z'_n = 0$), ni majorée (prendre $x'_n = 0$ et $y'_n = z'_n = n$).

Exercice 2.15.

Soit $\big(E, \langle .,. \rangle\big)$ un espace euclidien, u un vecteur de E, α un réel et f défini par :

$$(\forall x \in E) \qquad f(x) = x + \alpha \langle x, u \rangle u$$

On note $||.||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique de $\big(E, \langle .,. \rangle\big)$.

2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f et étudier sa diagonalisabilité.
Retrouver ainsi le résultat de la question 1.

3. Déterminer (en fonction de α et u) dans quels cas f est une isométrie de E, c'est-à-dire vérifie :

$$(\forall x \in E) \qquad ||f(x)|| = ||x||$$

La reconnaître.

4. a) Dans le cas général, exprimer f à l'aide d'un projecteur et en déduire un polynôme annulateur P de f.

b) Étudier l'inversibilité de f et, lorsqu'il existe, exprimer son inverse à l'aide de f et de l'endomorphisme Id.

Solution :

On observe d'abord que si $\alpha = 0$ ou $u = 0$, on a $f = Id$. Les réponses aux questions posées sont alors banales et on exclut ces deux cas dans la suite.

1. L'application f est linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire. Pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \alpha \langle x, u\rangle \langle y, u\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

car l'expression est symétrique en x et y, donc f est un endomorphisme symétrique de E.

2. On a : $f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \alpha \langle x, u\rangle u = (\lambda - 1)\, x$.

D'où deux cas :

- si $x \notin \mathrm{Vect}(u)$, alors $\langle x, u\rangle = \lambda - 1 = 0$, soit $\lambda = 1$ et $x \in u^{\perp}$;
- pour $x = u$, il vient $f(u) = \left(1 + \alpha\, ||u||^2\right) u$, donc u est vecteur propre associé à $\lambda = 1 + \alpha\, ||u||^2$.

Finalement $\mathrm{Spec}(f) = \left\{1, \lambda = 1 + \alpha\, ||u||^2\right\}$

avec $\mathrm{Ker}(f - Id) = u^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id) = Vect(u)$.

L'endomorphisme f est diagonalisable comme endomorphisme symétrique réel ; on le retrouve directement puisqu'on a $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus u^{\perp}$, donc E est somme directe des sous-espaces propres de f.

La matrice de f dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus u^{\perp}$ est diagonale, soit $\mathrm{diag}\left(1, \ldots, 1, 1 + \alpha\, ||u||^2\right)$, donc symétrique, ce qui prouve que f est un endomorphisme symétrique réel.

3. On a : $||f(u)|| = ||u|| \Longleftrightarrow 1 + \alpha\, ||u||^2 = \pm 1$

Comme $\alpha \neq 0$, il vient : $\alpha = -\dfrac{2}{||u||^2}$.

On a alors $f\,|_{\mathrm{Vect}(u)} = -Id$ et $f\,|_{u^{\perp}} = Id$, donc f est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^{\perp}$.

4. a) Notons p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)$ et $q = Id - p$ le projecteur associé. On a :

$$f = \left(1 + \alpha\, ||u||^2\right)p + q = (\lambda - 1)\, p + Id$$

soit : $p = \dfrac{1}{\lambda - 1}(f - Id)$ (le cas $\lambda = 1$a été exclu au début). Alors :

$$\begin{aligned}
p \circ p = p \implies & \frac{1}{(\lambda - 1)^2}\left(f^2 - 2f + Id\right) = \frac{1}{\lambda - 1}\,(f - Id) \\
\implies & f^2 - (\lambda + 1)\, f + \lambda\, Id = 0 \\
\implies & f^2 - \left(2 + \alpha\, ||u||^2\right) f + \left(1 + \alpha\, ||u||^2\right) Id = 0
\end{aligned}$$

d'où :

$$P(X) = X^2 - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) X + \left(1 + \alpha\,||u||^2\right)$$

est un polynôme annulateur de f.

b) On a f inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ c'est-à-dire si et seulement si $1 + \alpha\,||u||^2 \neq 0$.

Dans ce cas, $f \circ \left[f - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) Id\right] = -\left(1 + \alpha\,||u||^2\right) Id$ donne :

$$f \circ \left[\frac{f - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) Id}{-\left(1 + \alpha\,||u||^2\right)}\right] = Id \text{ et } f^{-1} = -\frac{f - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) Id}{1 + \alpha\,||u||^2}.$$

Exercice 2.16.

1. Déterminer les applications dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ , (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

2. a) Vérifier que $\mathcal{E}$ est stable par produit et passage à l'inverse, c'est-à-dire :
   - pour toutes matrices M et M' de $\mathcal{E}$, $MM' \in \mathcal{E}$;
   - toute matrice M de $\mathcal{E}$ est inversible et son inverse appartient à $\mathcal{E}$.

   b) Deux matrices quelconques de $\mathcal{E}$ commutent-elles ?

On dira que la matrice $M(a(t), b(t), c(t))$ est dérivable en t_0 si les trois fonctions a, b, c sont dérivables en t_0.

3. a) Déterminer les applications φ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ par

$$\varphi : t \mapsto M\left[a(t), b(t), c(t)\right]$$

dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ (\forall t' \in \mathbb{R}) \qquad \varphi(t+t') = \varphi(t) \times \varphi(t')$$

   b) Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est stable par produit et passage à l'inverse.

   c) Deux matrices quelconques de $\mathrm{Im}\,\varphi$ commutent-elles ?

Solution :

1. En prenant $y = 0$, on remarque que $f(0) = 0$. Puis, pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, en dérivant par rapport à x on a $f'(x+y) = f'(x)$; d'où, pour $x = 0$, $f'(y) = f'(0)$ et f' est constante, donc f est linéaire, c'est–à–dire de la forme $x \mapsto ax$. La réciproque est immédiate.

2. a) On vérifie que

$$M(a,b,c) \times M(a',b',c') = M(a+a', b+b'+ac', c+c') \in \mathcal{E}$$

De plus, toute matrice de $\mathcal{E}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc est inversible et $I = M(0,0,0) \in \mathcal{E}$.
La formule ci-dessus du produit donne, en résolvant le système

$$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' + ac' = 0 \\ c + c' = 0 \end{cases}$$

$$\big[M(a,b,c)\big]^{-1} = M(-a, ac - b, -c) \in \mathcal{E}$$

b) La formule du produit montre encore que :

$$MM' = M'M \iff ac' = ca'$$

donc $(\mathcal{E}, \times)$ est non commutatif.

3. a) D'après la première question, il vient :

$$\varphi(t + t') = \varphi(t) \times \varphi(t') \iff \begin{cases} a(t + t') = a(t) + a(t') \\ b(t + t') = b(t) + b(t') + a(t)\, c(t') \\ c(t + t') = c(t) + c(t') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\exists \alpha)\ (\forall t)\ a(t) = \alpha\, t \\ (\exists \gamma)\ (\forall t)\ c(t) = \gamma\, t \\ b(t + t') = b(t) + b(t') + \alpha\, \gamma\, tt' \end{cases}.$$

Pour $t = t' = 0$, on a nécessairement $b(0) = 0$;
en dérivant par rapport à t, il vient $b'(t + t') = b'(t) + \alpha\gamma\, t'$, puis $t = 0$ donne $b'(t') = b'(0) + \alpha\gamma\, t'$ soit, en notant $\beta = b'(0)$, $b(t) = \alpha\gamma\, \dfrac{t^2}{2} + \beta\, t$.
On montre enfin que cette condition est suffisante en vérifiant dans l'équation $b(t + t') = b(t) + b(t') + \alpha\, \gamma\, tt'$.
Conclusion :

$$\big(\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\big)(\forall t \in \mathbb{R}) \quad a(t) = \alpha\, t; \quad b(t) = \frac{\alpha\,\gamma}{2}\, t^2 + \beta\, t; \quad c(t) = \gamma\, t$$

b) Alors

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \left\{ M\left(\alpha\, t, \frac{\alpha\gamma}{2}\, t^2 + \beta\, t, \gamma\, t\right),\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble $\operatorname{Im}\varphi$ est stable par produit par construction et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(-t) \times \varphi(t) = \varphi(0) = M(0,0,0) = I_3 \implies \big[\varphi(t)\big]^{-1} = \varphi(-t) \in \mathcal{E}$$

En conclusion $\operatorname{Im}\varphi$ stable par produit et passage à l'inverse.

c) On a immédiatement

$$\varphi(t) \times \varphi(t') = \varphi(t + t') = \varphi(t' + t) = \varphi(t') \times \varphi(t)$$

donc $(\operatorname{Im}\varphi, \times)$ est commutatif.

Exercice 2.17.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$ et φ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, dont les valeurs propres réelles sont toutes strictement positives.

On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que, pour tout vecteur non nul $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle \varphi(h), h\rangle > 0$$

2. Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle \varphi(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$$

a) Justifier que f admet des dérivées partielles du premier et du second ordre en tout point de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.

b) Montrer que f admet un unique point critique z (c'est-à-dire un point où toutes les dérivées partielles premières sont nulles), que l'on précisera.

c) Étudier les extremums de f.

d) Retrouver le résultat précédent en examinant $f(z+h) - f(z)$.

Solution :

1. L'endomorphisme symétrique réel φ est diagonalisable en base orthonormée ; dans une telle base de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, on a :

$$h = \sum_{j=1}^{n} h'_j \,\varepsilon_j \ (\neq 0) \implies \langle \varphi(h), h\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h'_i\, h'_j\, \langle \varphi(\varepsilon_i), \varepsilon_j\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h'_i\, h'_j\, \lambda_i\, \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (h'_i)^2\, \lambda_i > 0$$

soit, pour tout $h \neq 0$ $\langle \varphi(h), h\rangle > 0$.

2. a) Puisque φ a pour matrice $A = (a_{i,j})$ dans la base canonique, $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = f\big(x_1, \dots, x_n\big) = \frac{1}{2}{}^t(AX)X - {}^tUX = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j - \sum_{j=1}^{n} u_j x_j$$

expression polynomiale en les x_j, donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

Les dérivées partielles premières sont alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_0}}(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{i,i_0} x_i - u_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j - u_{i_0}.$$

car A est symétrique en tant que matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormée. Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - u_i$$

En dérivant l'expression ci-dessus, il vient (d'après le théorème de Schwarz),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = a_{i,j}$$

b) Le point $z \in \mathbb{R}^n$ est critique si et seulement si toutes les dérivées partielles au point z sont nulles, ce qui équivaut à :

$$(\forall i \in [\![1, n]\!]) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, z_j - u_i = 0, \text{ i.e. } AZ = U$$

Comme 0 n'est pas valeur propre de A par hypothèse, A (donc φ) est inversible et f admet un unique point critique $z = \varphi^{-1}(u)$.

c) La fonction f étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, un extremum ne peut être réalisé qu'en un point critique, donc en $z = \varphi^{-1}(u)$. La matrice des dérivées partielles secondes en z est A, donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} h_i h_j = {}^t(AH)H = \langle \varphi(h), h\rangle > 0 \quad \text{si} \quad h \neq 0$$

ce qui montre que f présente un minimum global en $z = \varphi^{-1}(u)$ égal à $-\frac{1}{2}\langle u, z\rangle$.

d) Sachant que $z = \varphi^{-1}(u)$ est le seul extremum possible, on calcule (par bilinéarité) :

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{1}{2}\langle \varphi(z+h), z+h\rangle - \langle u, z+h\rangle - \frac{1}{2}\langle \varphi(z), z\rangle + \langle u, z\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \varphi(h), z\rangle + \frac{1}{2}\langle h, \varphi(z)\rangle + \langle \varphi(h), h\rangle - \langle u, h\rangle \\ &= \langle \varphi(z), h\rangle - \langle u, h\rangle + \langle \varphi(h), h\rangle = \langle \varphi(h), h\rangle \end{aligned}$$

car φ est symétrique et $\varphi(z) = u$, donc f présente un minimum global en z d'après la première question.

Exercice 2.18.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ où $n \geqslant 2$, muni du produit scalaire canonique que l'on notera

$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle.$$

Dans tout l'exercice f est une **application** de E dans E antisymétrique (on dit que f est antisymétrique si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x), y\rangle$.)

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. Que peut-on dire de la matrice de f dans la base canonique de E ?

2. Soit $\mathcal{A} = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \text{ est antisymétrique }\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

3. a) Montrer que f^2 est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que si λ est une valeur propre *réelle* de f, alors $\lambda = 0$.

4. On suppose que l'endomorphisme f est inversible. Soit e un vecteur propre de f^2. Montrer que $F = \operatorname{Vect}(e, f(e))$ (sous-espace vectoriel engendré par e et $f(e)$) est de dimension 2 et qu'il est stable par f.

En déduire que $F^{\perp}$, l'orthogonal de F, est stable par f, et que la dimension de E est paire.

5. Dans le cas général, montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires orthogonaux et que le rang de f est pair.

Solution :

1. Il faut démontrer que f est une application **linéaire**. Soit $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle f(x+\lambda y), z\rangle &= -\langle x+\lambda y, f(z)\rangle = -\langle x, f(z)\rangle - \lambda\langle y, f(z)\rangle \\ &= \langle f(x), z\rangle + \lambda\langle f(y), z\rangle\end{aligned}$$

Donc, pour tout $z \in E$:

$$\langle f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y), z\rangle = 0$$

et, seul le vecteur nul étant orthogonal à E :

$$\forall\, x, y \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

La matrice $A = (a_{i,j})$ associée à f dans la base canonique orthonormée de E est antisymétrique, puisque pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j)\rangle = -\langle e_j, f(e_i)\rangle$ entraîne que $a_{i,i} = 0$ et que $a_{i,j} = -a_{j,i}$, pour $i \neq j$.

Réciproquement, toute matrice antisymétrique (${}^tA = -A$) détermine un endomorphisme antisymétrique de E.

2. Il est évident que $\mathcal{A}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Par la question précédente, sa dimension est égale à la dimension de l'espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ce sous-espace est engendré par les $\dfrac{n(n-1)}{2}$ matrices $E_{i,j} - E_{j,i}$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

[$E_{i,j}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls, à l'exception de celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1]

3. a) Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\langle f^2(x), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^2(y)\rangle$$

Ce qui montre que f^2 est un endomorphisme symétrique.

b) Soit λ une valeur propre réelle de f. Il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors :

$$0 = \langle f(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle, \text{ d'où } \lambda = 0$$

La seule valeur propre réelle de f possible est donc 0.

4. Remarquons déjà que puisque f^2 est symétrique, on peut bien trouver un vecteur e propre pour f^2.

$\star$ Supposons $\big(e, f(e)\big)$ lié. Comme $e \neq 0$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e) = \lambda e$. Or, la seule valeur propre réelle possible de f est 0 ; donc $f(e) = 0$, ce qui est une contradiction à l'inversibilité de f.

$\star$ Le sous-espace $F = \mathrm{Vect}\big(e, f(e)\big)$ est stable par f, puisque par choix de e on a $f(e) \in F$ et $f\big(f(e)\big) \in F$.

$\star$ Soit $z \in \mathrm{Vect}\big(e, f(e)\big)^{\perp}$. On a $\langle z, e\rangle = \langle z, f(e)\rangle = 0$. Donc

$$\langle f(z), e\rangle = -\langle z, f(e)\rangle = 0 \text{ et } \langle f(z), f(e)\rangle = -\langle z, f^2(e)\rangle = 0$$

ce qui montre que $F^{\perp}$ est stable par f.

On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$, avec $\dim F = 2$. L'application f restreinte à $F^{\perp}$ est un endomorphisme de $F^{\perp}$ qui est toujours antisymétrique. On la note $\widetilde{f}$.

On peut recommencer le même raisonnement : on choisit un vecteur propre e_2 de $\widetilde{f}^2$; le sous–espace $\mathrm{Vect}\big(e_2, f(e_2)\big)$ est de dimension 2 et $\mathrm{Vect}\big(e, f(e), e_2, f(e_2)\big)$ est de dimension 4. Son orthogonal est stable par f. Si $\dim E = 2n+1$, on peut ainsi écrire :

$$E = \mathrm{Vect}\big(e, e_2, \dots, e_n, f(e), f(e_2), \dots, f(e_n)\big) \oplus^{\perp} H, \quad \dim H = 1$$

ce qui est impossible car $f_{|H}$ est un endomorphisme antisymétrique, bijectif qui admet une valeur propre réelle (car $\dim H = 1$).

5. Montrons que $\mathrm{Ker}\, f \subset (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et $f(z) \in \mathrm{Im}\, f$, alors

$$\langle x, f(z)\rangle = -\langle f(x), z\rangle = \langle 0, z\rangle = 0$$

Le théorème du rang et le fait que pour tout sous–espace vectoriel H de E, on a $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E$, impliquent que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$. Cela montre que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires orthogonaux.

Posons $g = f_{|\,\mathrm{Im}\, f}$. Alors g est un endomorphisme bijectif de $\mathrm{Im}\, f$ qui est antisymétrique. Donc $\dim \mathrm{Im}\, f$ est paire, par la question précédente.

Exercice 2.19.

On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ et B la « sous-matrice » $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ de A.

1. Montrer que la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est de rang 3.

2. Soit λ une valeur propre de B et soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une colonne propre réelle de B associée à λ.

a) Montrer que $\lambda \neq 0$ et que la colonne $U = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\lambda} \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est colonne propre de A associée à λ.

b) On pose $m = \max\big(|x|, |y|, |z|\big)$. Pour quelle raison peut-on affirmer que $m > 0$?

Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$. *On montrera que* $|\lambda x| \leqslant m$, $|\lambda y| \leqslant m$ *et* $|\lambda z| \leqslant m$.

Montrer que $|\lambda| < 1$. *On montrera que, si* $|\lambda| = 1$, *alors* $|x| < m$, $|y| < m$ *et* $|z| < m$.

3. Montrer que 0 est valeur propre de A et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

4. Déduire des résultats précédents que la matrice $I_4 - A$ est inversible.

Solution :

1. La matrice B est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

Par la méthode du pivot de Gauss, on obtient que $4B$ est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B est donc de rang 3 et inversible.

2. a) La matrice B étant inversible, si λ est une valeur propre de B, alors $\lambda \neq 0$.

Un calcul matriciel élémentaire montre que si $BV = \lambda V$, alors $AU = \lambda U$. Il reste à observer que puisque $V \neq 0$, on a $U \neq 0$. Donc λ est valeur propre de A et U est un vecteur propre associé.

b) Le vecteur V n'étant pas le vecteur nul, on a $m > 0$.

Comme $\lambda x = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$, il vient $|\lambda x| \leqslant \dfrac{|x|}{2} + \dfrac{|y|}{4} \leqslant \dfrac{3m}{4}$, donc $|\lambda x| \leqslant m$,

Comme $\lambda y = \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4}$, il vient $|\lambda y| \leqslant \dfrac{|x|}{4} + \dfrac{|y|}{2} + \dfrac{|z|}{4}$, donc $|\lambda y| \leqslant m$,

Comme $\lambda z = \frac{y}{4} + \dfrac{3z}{4}$, il vient $|\lambda z| \leqslant \dfrac{|y|}{4} + \dfrac{3|z|}{4}$, donc $|\lambda z| \leqslant m$.

De ces trois relations découle $|\lambda| m \leqslant m$, d'où $|\lambda| \leqslant 1$, puisque $m \neq 0$.

Supposons $|\lambda| = 1$. On a alors $|x| = |\lambda x| \leqslant \dfrac{3m}{4}$.

Reportons cette inégalité dans $|y| \leqslant \dfrac{|x|}{4} + \dfrac{|y|}{2} + \dfrac{|z|}{4}$; il vient $|y| \leqslant \dfrac{15m}{16}$.

Reportons cette inégalité dans $|z| \leqslant \frac{|y|}{4} + \frac{3|z|}{4}$, il vient $|z| \leqslant \frac{63m}{64}$.

Ainsi $m \leqslant \max\left(\frac{3m}{4}, \frac{15m}{16}, \frac{63m}{64}\right) = \frac{63m}{64}$, ce qui est une absurdité.

Donc $|\lambda| < 1$.

3. La première colonne de A étant nulle, 0 est valeur propre de A associée au vecteur propre $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notons (V_2, V_3, V_4) une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B, et pour $k \in \{2, 3, 4\}$, notons U_k la colonne propre de A déduite de V_k comme dans la question 2.

Comme 0 n'est pas valeur propre de B, la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. La matrice A est donc diagonalisable.

4. Comme 1 n'est pas valeur propre de A, la matrice $I - A$ est inversible.

Exercice 2.20.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geq 1$.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in E$ avec $a \neq 0$ tel que $A(p, a) = \{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{p-1}(a)\}$ soit une partie génératrice de E de cardinal p stable par f.
(Notons que l'on a alors, en particulier, $f(A(p, a)) \subset A(p, a)$ et les $f^k(a)$ sont deux à deux distincts pour $k \in [\![0, p-1]\!]$).
$A(p, a)$ s'appelle un cycle de f.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et $A(p, a)$ un cycle de f. Montrer que $p \geq n$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique bijectif et $A(p, a)$ un cycle de f.

a) Montrer que le plus grand entier m tel que $\{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a)\}$ soit libre est n.
En déduire que $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.

b) Montrer que $f^p = Id_E$. En déduire que les valeurs propres sont des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de matrice B dans la base canonique est cyclique. Donner un cycle associé.

Trouver les valeurs et les vecteurs propres de f pour $n = 4$.

Solution :

1. La famille $A(p, a)$ est génératrice et de cardinal p. Donc $p \geqslant n$.

2. a) On sait que $f^m(a)$ est combinaison linéaire de $\big(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big)$.
Soit $k \geqslant m$, supposons que $f^k(a) \in \text{Vect}\,\big(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big)$.
Alors $f^{k+1}(a) \in \text{Vect}\,\big(f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a), f^m(a)\big)$. Il suffit d'écrire $f^m(a)$ en fonction de $a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)$, pour obtenir que $\big(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big)$ engendre $A(p, a)$ qui lui–même engendre E. C'est donc une famille libre et génératrice de E. Ainsi $m = n$.

b) Comme $f^p(a) \in A(p, a)$, il existe q vérifiant $0 \leqslant q < p$ tel que $f^p(a) = f^q(a)$. Comme f est bijective $f^{p-q}(a) = a$. La seule possibilité pour que les éléments de $A(p, a)$ soient distincts est $q = 0$ et donc $f^p(a) = a$.
Donc, pour tout $k \geqslant 1$, $f^p\big(f^k(a)\big) = f^k(a)$. Ce résultat appliqué à la base $\mathcal{B}$ montre que $f^p = Id$.

Le polynôme $X^p - 1$ est annulateur de f ; les valeurs propres de f sont donc parmi les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité.

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si l'on prend $a = e_1$, il vient pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^k(a) = e_{k+1}$, $f^n(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$ et $f^{n+1}(a) = e_1$.
On a donc un cycle et $p = n + 1$.

On sait que dans le cas où $n = 4$, les valeurs propres sont parmi les racines cinquièmes de l'unité. Si λ est une valeur propre, le vecteur propre associé est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\lambda}{\lambda} \\ \dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda^2} \\ \dfrac{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3}{\lambda^3} \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

On vérifie enfin que $\lambda = 1$ n'est pas valeur propre.